ANALYSE D'ACTIVITÉS À PROPOS DE LA DIFFÉRENCIATION ENTRE AIRE ET PÉRIMÈTRE (MOYENS COROME[1] 3P À 6P[2])

Audrey Daina[3]

Nous présentons dans cet article l'analyse d'activités des Moyens d'enseignement COROME qui permettent de travailler la différenciation entre aire et périmètre dans les degrés de la 3P à la 6P. Ces analyses ont été réalisées dans le cadre d'un travail de thèse de doctorat visant à décrire et analyser de quelles manières des enseignants genevois utilisent les ressources pour préparer et réaliser en classe une suite d'activités à propos de la notion d'aire[4].

Nous commençons par donner quelques éléments théoriques que les recherches en didactique sur le sujet ont pu mettre en évidence et qui permettent de guider nos analyses. Nous présentons ensuite deux activités de 3P et 4P en faisant des liens avec d'autres activités similaires d'autres degrés.

1 Pour les lecteurs étrangers, rappelons que c'est ainsi que l'on désignait les diverses ressources officielles de l'enseignement primaire en mathématiques pour la Suisse Romande (COROME : Commission Romande des Moyens d'Enseignement).

2 Dans tout cet article, nous utiliserons l'ancienne nomenclature pour les degrés de l'école primaire soit 2 années d'enfantines (1E, élèves de 4-5 ans et 2E élèves de 5-6 ans) et 6 années de primaire (1P, élèves de 6-7 ans, à 6P, élèves de 11-12 ans). Nous avons fait ce choix pour faciliter la compréhension du texte car c'était le système en vigueur lors de nos observations et que, par ailleurs, les activités que nous analysons sont issues des moyens d'enseignement COROME, qui n'ont pas encore été réédités selon les nouvelles nomenclatures.

3 audrey.daina@unige.ch

4 Nous ne présentons pas dans cet article la globalité de notre recherche (en cours) mais une petite part portant sur l'analyse de quelques activités.

DU CÔTÉ DES RECHERCHES EN DIDACTIQUE

Les recherches en didactique des mathématiques ont mis en évidence depuis les années 80 que l'enseignement des notions d'aire et de périmètre tel qu'il était dispensé dans la plupart des classes était problématique (Perrin et Douady 1989, Baturo et Nason, 1996). D'une manière générale, on observe que l'enseignement est souvent trop centré sur la mesure par pavage et l'application de formules d'aires ou de périmètres au détriment de la compréhension du lien entre l'objet (la surface), les grandeurs (l'aire ou le périmètre) et les nombres (qui représentent la mesure de cette grandeur).

La recherche de Perrin et Douady (1988, 1989), par exemple, permet de se faire une première idée des difficultés qui peuvent être observées en classe autour des notions d'aire et de périmètre. Ces chercheuses ont construit et expérimenté une séquence d'apprentissage du concept d'aire de surface plane dans deux classes (9-10 ans et 10-11 ans). Elles montrent, par exemple, que pour certains élèves l'aire est indissociable des autres caractéristiques d'une surface, ce qui conduit aux fausses conceptions suivantes :

- Si le périmètre d'une surface augmente, son aire aussi (et réciproquement).
- Si deux surfaces ont le même périmètre, elles ont la même aire (et réciproquement).

Dans leur travail, ces auteurs proposent de distinguer trois pôles dans l'enseignement de la notion d'aire : surfaces, grandeurs et nombres, distinction sur laquelle elles vont baser la construction de leur ingénierie didactique :

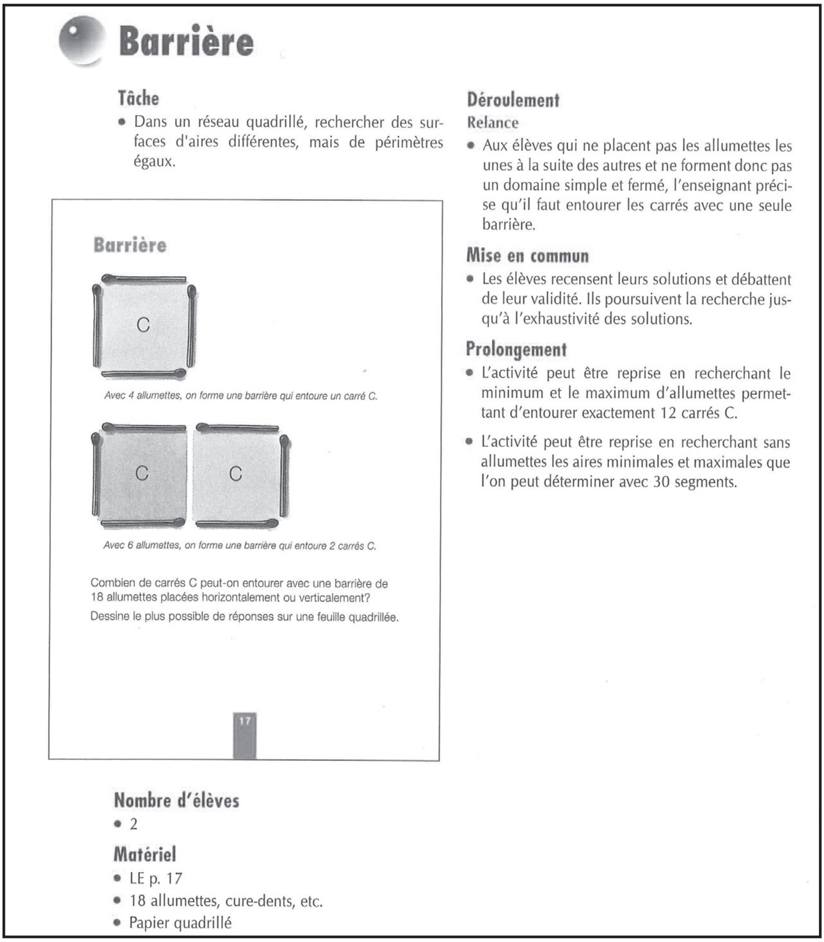
« Ceci nous amène d'une part à construire la notion d'aire comme grandeur autonome en faisant des comparaisons directes d'aires (par inclusion, par découpage-recollement) et des mesures directes d'aires avec des unités variées, d'autre part, d'établir des relations entre aires et longueurs en s'intéressant à diverses transformations. Les unes sont choisies pour pointer qu'aires et longueurs (périmètre par exemple) peuvent varier indépendamment l'une de l'autre, les autres pour établir des relations entre aires et longueurs (calcul d'aire de surfaces usuelles, bidimensionnalité : si les longueurs sont multipliées par un nombre K, l'aire est multipliée par K^2). » (Perrin et Douady, 1988, p. 162)

Les propositions de ces recherches ont été prises en compte par les concepteurs de ressources pour les classes et notamment les auteurs des Moyens COROME. Les activités que nous proposons dans cet article concernent le premier type de transformations citées, pour pointer qu'aire et périmètre varient indépendamment.

PLUSIEURS ACTIVITÉS QUI PEUVENT ABORDER CE SUJET DE LA 3P À LA 6P

Nous proposons d'analyser dans ce qui suit un choix d'activités des Moyens COROME qui font travailler la distinction entre aire et périmètre en confrontant ces deux grandeurs dans deux types de problème :

- Trouver des surfaces de même périmètre mais dont les aires sont différentes. Nous analysons l'activité « Barrière » (3P) et proposons un lien avec les activités « Avec 30 allumettes » (5P) (annexes) et « Quadrilatère articulé » (6P).
- Trouver des surfaces de même aire mais dont les périmètres sont différents. Nous analysons l'activité « Quinze » (4P) et proposons un lien avec l'activité « Des rectangles équivalents » (5P) (annexes)



Barrière

Tâche

- Dans un réseau quadrillé, rechercher des surfaces d'aires différentes, mais de périmètres égaux.

Barrière

C

Avec 4 allumettes, on forme une barrière qui entoure un carré C.

C C

Avec 6 allumettes, on forme une barrière qui entoure 2 carrés C.

Combien de carrés C peut-on entourer avec une barrière de 18 allumettes placées horizontalement ou verticalement?

Dessine le plus possible de réponses sur une feuille quadrillée.

17

Nombre d'élèves

- 2

Matériel

- LE p. 17
- 18 allumettes, cure-dents, etc.
- Papier quadrillé

Déroulement

Relance

- Aux élèves qui ne placent pas les allumettes les unes à la suite des autres et ne forment donc pas un domaine simple et fermé, l'enseignant précise qu'il faut entourer les carrés avec une seule barrière.

Mise en commun

- Les élèves recensent leurs solutions et débattent de leur validité. Ils poursuivent la recherche jusqu'à l'exhaustivité des solutions.

Prolongement

- L'activité peut être reprise en recherchant le minimum et le maximum d'allumettes permettant d'entourer exactement 12 carrés C.
- L'activité peut être reprise en recherchant sans allumettes les aires minimales et maximales que l'on peut déterminer avec 30 segments.

L'ACTIVITÉ « BARRIÈRE »

Pour cette activité, selon le matériel à disposition (18 allumettes et du papier quadrillé), les élèves peuvent soit réaliser effectivement les constructions en utilisant les allumettes, soit représenter les allumettes sur le quadrillage en les dessinant (1 allumette = 1 côté de carré). Notons que les deux solutions de positionnement des allumettes proposées sur le dessin de la consigne induisent fortement la construction de rectangles. Nous verrons cependant dans ce qui suit qu'il est important que l'élève expérimente la question en construisant divers polygones. Il est donc recommandé de rendre attentif l'élève au fait que toutes les constructions sont possibles.

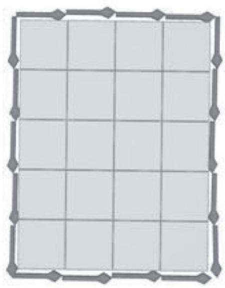
Dans le premier cas, où les constructions sont effectivement réalisées, les élèves prennent 18 allumettes et les assemblent avec comme contrainte de les positionner horizontalement ou verticalement. Le fait que la dernière allumette doive rejoindre la première, pour fermer le contour, peut s'ajuster par essais successifs, en déplaçant éventuellement des groupements d'allumettes ensembles. Notons qu'il est important que le papier quadrillé corresponde à la taille des allumettes. Comme solution alternative, il est également possible de préparer des carrés C prédécoupés aux dimensions des allumettes de manière à permettre un pavage des surfaces.

Dans le deuxième cas, où les élèves dessinent, ils doivent en plus compter le nombre de segments et si ça ne ferme pas à la fin, ils doivent effacer des traits, voire reprendre depuis le début. Cela demande de pouvoir anticiper sur la construction pour faire le dessin. On voit donc que le travail avec des allumettes est plus souple à gérer.

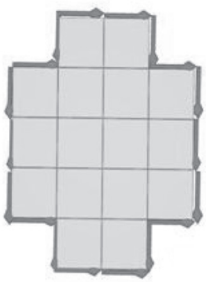
Une première procédure de résolution, « par essai-erreur », consiste à construire un premier polygone avec 18 allumettes et à compter combien de carrés C il contient (on ne parle pas encore ici de mesure car nous sommes en 3P et que la notion de mesure d'aire n'est pas encore au programme, il s'agit de pré-mesure). Une fois un premier polygone construit, l'élève peut :

- recommencer tout le processus.
- se baser sur la figure construite et la décomposer-recomposer de manière à trouver d'autres surfaces d'un périmètre de 18.

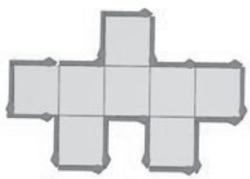
La première procédure est peu efficace si on cherche à avoir une certaine exhaustivité, mais peut permettre de trouver au départ quelques solutions radicalement différentes. La deuxième procédure est plus efficace si l'on veut trouver différentes solutions, voire toutes les solutions possibles, car l'élève peut alors anticiper sur le résultat (si on déplace telle ou telle allumette cela ajoute/enlève tant de carrés C). L'élève peut alors se rendre compte que, avec un périmètre constant, plus une surface est allongée plus l'aire est petite et que, pour les rectangles, plus la forme se rapproche de celle d'un carré plus l'aire est grande. Ils peuvent aussi sentir que des vides ou des excroissances qui rompent la convexité diminuent l'aire à périmètre constant, comme illustré dans les exemples ci-dessous :



Aire = 20 carrés C



Aire = 16 carrés C

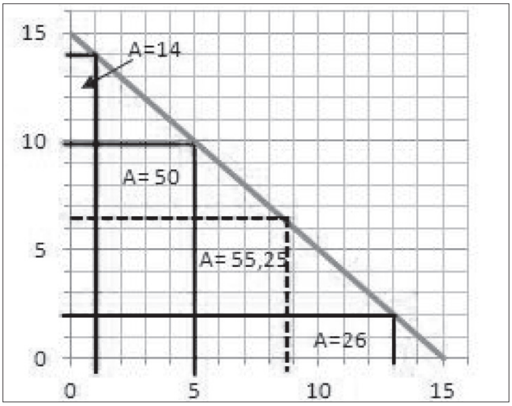


Aire = 8 carrés C

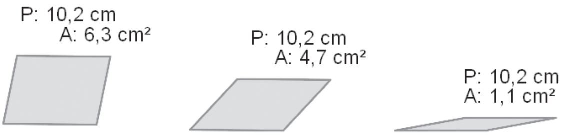
Cette première analyse concerne ce qui peut être fait selon les objectifs de 3P. Cependant ce type d'activité est encore d'actualité dans les degrés supérieurs de 4P, 5P et 6P, en adaptant les énoncés (le nombre d'allumettes, le matériel à disposition) et en faisant évoluer les procédures de résolution.

A partir d'une activité comme « Barrière », l'enseignant peut par exemple mettre en évidence une troisième procédure plus systématique qui consiste à construire tous les rectangles possibles (en faisant le lien avec la formule de calcul pour le périmètre du rectangle et la recherche des décompositions additives de 9). Cette étape permet d'obtenir l'aire minimale (de mesure 8 carrés C) et maximale (de mesure 20 carrés C) et de partir de ces rectangles pour construire d'autres surfaces par décomposition-recomposition, selon la logique que nous venons de décrire pour trouver toutes les solutions possibles. On peut ainsi vérifier expérimentalement que l'on ne peut construire que des surfaces dont les aires ont des mesures comprises entre 8 et 20 carrés C (la démonstration théorique est hors de portée des élèves).

L'activité « Avec 30 allumettes » (annexes) est un exemple d'activité du même type que l'on trouve dans le livre de 5P (dans ce cas on ne cherche que les rectangles formés avec 30 allumettes). Dans le livre du maître, on suggère de prolonger la recherche afin de trouver d'autres rectangles qui ont un périmètre de 30 unités, avec des côtés de mesures non entières, en imaginant que l'on peut casser les allumettes. Ceci conduit à introduire une dernière procédure : la réalisation d'un graphique sur lequel il est possible de pointer d'autres rectangles possibles (comme le rectangle 6,5 x 8,5 d'aire 55,25). Ceci permet finalement d'envisager un changement continu de la mesure d'aire entre les deux valeurs extrêmes.



Dans le même esprit, on trouve l'activité « le quadrilatère articulé » en 6P qui permet, elle aussi, de mettre en évidence les variations d'aires possibles dans le cas d'un parallélogramme de mesures de côtés fixes mais dont on « rapproche » deux côtés opposés pour arriver à la position limite du parallélogramme aplati d'aire nulle. Cet aspect dynamique permet de mettre en évidence la variation de l'aire grâce aux transformations de la figure.



L'ACTIVITÉ « QUINZE »

Cette activité, illustrée à la page suivante, ressemble beaucoup à l'activité que nous venons d'analyser, si ce n'est qu'il s'agit ici de construire des surfaces d'aire constante mais de périmètres différents. Ici travailler avec du matériel (des carrés prédécoupés) ou en dessinant sur du papier quadrillé impliquent les mêmes stratégies.

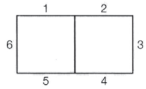
Quinze

Tâche

- Comparer les périmètres de surfaces d'aires équivalentes.

Quinze

Cette forme est constituée de 2 plaquettes assemblées.



Son périmètre est de 6.

Quel peut être le périmètre d'une forme constituée de 15 plaquettes assemblées?
Cherche le plus possible de périmètres différents.

64

Nombre d'élèves

- 2

Matériel

- LE p. 64
- MC: 15 plaquettes carrées
- Papier quadrillé

Mise en commun

- Les élèves comparent leurs solutions et les valident à l'aide des plaquettes ou de leurs dessins. Ils recensent les périmètres obtenus.

Variable

Matériel

- L'activité est menée avec d'autres nombres, mais sans matériel. Ainsi, les élèves doivent prendre à leur charge la représentation de la situation et s'appuyer davantage sur leurs dessins et leurs raisonnements.

Prolongement

- L'enseignant propose la consigne suivante: *"Construis un rectangle de 2 x 10 plaquettes carrées.*

  Cherche son aire et son périmètre.

  Modifie cette figure:
  - *en enlevant des plaquettes, mais en augmentant le périmètre,*
  - *en ajoutant des plaquettes, mais en diminuant le périmètre."*

Une première procédure, « par essai-erreur », consiste à construire un premier polygone et à mesurer son périmètre (on peut parler de mesure pour le périmètre car il s'agit d'une longueur et la mesure de longueur est au programme de la 4P). Le périmètre peut être mesuré soit en comptant les unités « côté d'un carré » soit en comptant les unités sur quadrillage (selon le quadrillage un côté de carré ne correspondra pas à un côté du « carré unité », il sera donc nécessaire de procéder à des changements d'unités) soit en utilisant une règle.

Une fois ce premier polygone construit l'élève peut soit recommencer le processus, soit entrer dans une procédure plus systématique de décomposition-recomposition de la surface construite pour créer une surface qui ait même aire mais un périmètre différent. Comme dans l'activité précédente, dans l'application de cette technique des connaissances géométriques peuvent entrer en jeu. Si on demande par exemple le périmètre le plus grand, il faudra construire la surface la plus allongée et étroite possible (ce qui donne un périmètre de 32 si on demande à ce que les carrés se touchent par un côté ou un périmètre de 60 si les carrés peuvent être assemblés par un sommet). Si on demande la surface avec le plus petit périmètre, il faut se rapprocher de la forme de type carrée (ici il s'agit du rectangle 3x5 qui donne un périmètre de 16). Néanmoins une justification rigoureuse de ce résultat est assez complexe à rédiger.

Cette activité peut également être reprise dans les degrés supérieurs. L'activité « Rectangles équivalents » (annexe) nous donne un bon exemple d'activité similaire en 5P.

Dans ce cas on ne cherche que des rectangles et il n'est pas précisé si les dimensions doivent être en nombres entiers. Pour cette activité deux procédures nouvelles apparaissent :

- Une procédure qui implique l'utilisation de techniques numériques : connaissant l'aire trouver les dimensions possibles. Ici la technique consiste à résoudre l'équation : axb=30 c'est-à-dire, si on se restreint aux nombres entiers, à trouver les diviseurs de 30 (1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 10 ; 15 ; 30) ce qui nous permet de trouver les périmètres de tous les rectangles dont les dimensions sont en nombres entiers.
- En 5P ce travail peut-être approfondi en cherchant d'autres rectangles possibles, dont les dimensions ne se mesurent pas en nombres entiers. Pour cela, l'utilisation d'un graphique est possible. Comme suggéré par l'énoncé, il faut dessiner les différents rectangles sur un système d'axes et montrer ensuite sur la ligne continue du graphique les dimensions possibles des rectangles.

CONCLUSION

L'analyse de ces deux activités nous a permis de mettre évidence de quelle manière il est possible d'aborder la question de la différenciation entre aire et périmètre dans les différents degrés de l'enseignement primaire. Nous avons montré qu'à partir d'un même type d'activité il était possible, en variant le matériel, les énoncés et les questions, de faire évoluer les procédures. Cette évolution est importante car elle permet de passer d'une perception de la variation de l'aire en termes discrets à une variation continue où toutes les valeurs sont possibles. Cette évolution permet d'introduire une vision de l'aire en rapport avec les transformations de la figure et de mettre en évidence que périmètre et aire varient indépendamment.

Notons aussi que le travail sur un logiciel de géométrie dynamique permet d'une autre manière de mettre en évidence cette question. Il est possible sur Cabri ou Geogebra, par exemple, de construire des figures avec plusieurs points déplaçables et d'afficher la mesure de leurs aires et/ou périmètres. En déplaçant les points, l'élève peut voir de quelle manière les mesures d'aire ou de périmètre varient indépendamment[5].

RÉFÉRENCES

Baturo, A. & Nason, R. (1996). Student Teachers'Subject Matter Knowledge within the domain of Area Measurement. *Educational Studies in Mathematics 31 (*3), 235-268.

Chastellain, M. & Jaquet, F. (2001). *Mathématiques cinquième année. Méthodologie-Commentaires.* Neuchâtel : COROME.

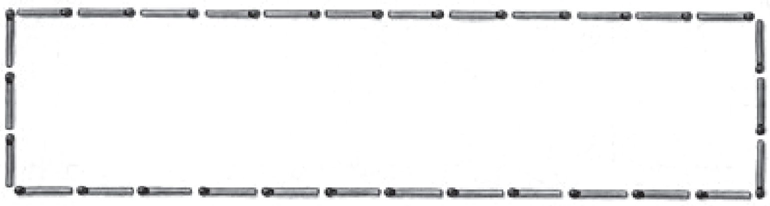
Douady, R. & Perrin-Glorian M-J. (1989). Un processus s'apprentissage du concept d'aire de surface plane. *Educational Studies in Mathematics. 20* (4), 387-424.

Douady R. & Perrin-Glorian M.J. (1988). Conceptions des élèves à propos d'aires de surfaces planes, *Actes du 1er Colloque Franco-Allemand de Didactique des Mathématiques et de l'informatique,* pp.161-172.

5 Pour plus d'informations sur les logiciels de géométrie dynamique, voir dans ce même numéro l'article de Sylvia Coutat.

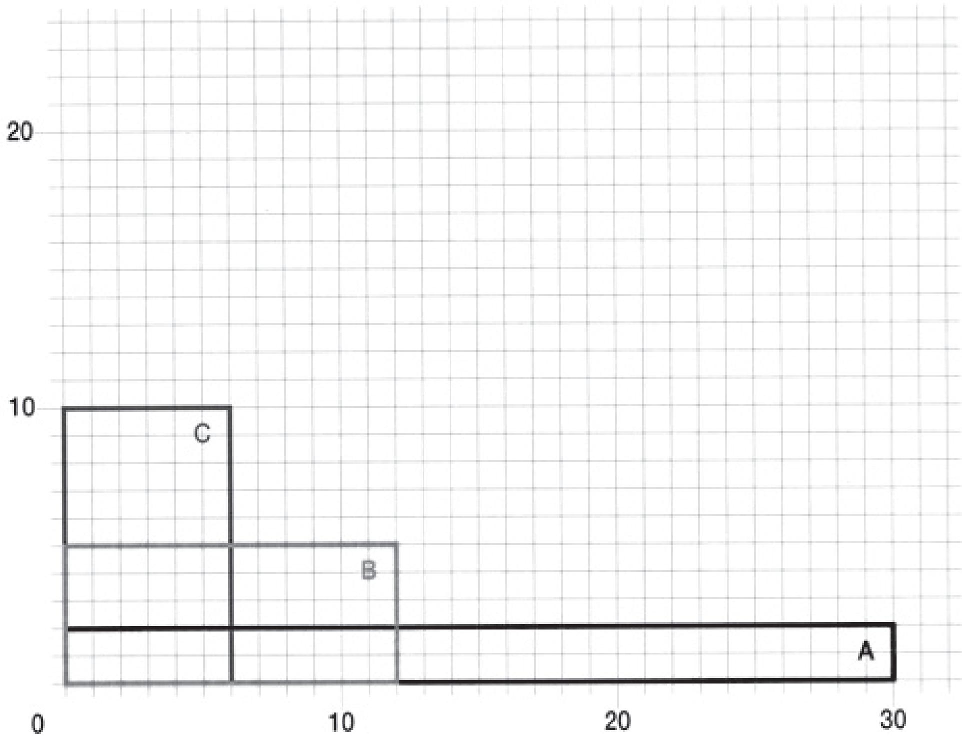
6. Avec 30 allumettes

Quel est le «plus grand» rectangle que tu peux former à l'aide de 30 allumettes?



3. Rectangles équivalents

Voici trois rectangles qui n'ont pas les mêmes dimensions.



Combien mesurent leur aire et leur périmètre?

Existe-t-il d'autres rectangles équivalents à ceux-ci?