les nombres en couleurs

Mars 1964 **12**

Bulletin Cuisenaire

PARAIT 5 FOIS PAR AN - ABONNEMENT: FR. 3.— - CHEQUES POSTAUX I 16713, GENEVE
REDACTEUR: S. ROLLER, ECOLE DU MAIL, GENEVE, 5, RUE DU VILLAGE SUISSE. TEL. (022) 24 79 60

Impressions sur la méthode Cuisenaire

Les articles qu'on va lire sont dus à la plume d'un praticien de l'enseignement, formé aux mathématiques et qui a tenté, avec succès, un essai « réglettes » avec de grands élèves. Cette contribution nous réjouit à plus d'un titre: elle montre que le matériel Cuisenaire peut être utilisé à tous les degrés de l'enseignement; elle introduit dans l'équipe du Bulletin un collaborateur nouveau. A bon entendeur, salut !

Tout enseignement, pour être efficace, doit partir du concret. Cela correspond à la démarche naturelle d'un esprit incarné. Tel d'ailleurs est le processus de la recherche scientifique qui découvre les lois à partir de multiples constatations et à la suite de généralisations successives. Tel est l'itinéraire tracé à l'intelligence humaine.

C'est dans cette perspective que j'envisage la méthode Cuisenaire qui m'apparaît comme la méthode scientifique de la recherche proprement mathématique. L'élève, à l'instar du savant dans son laboratoire, se livre à de multiples expériences qui le conduiront de *lui-même* à la découverte des lois qui régissent le monde des nombres. En toute vérité l'élève découvre, invente, crée. D'auditeur souvent passif qu'il était avec les méthodes traditionnelles il devient acteur et créateur. Ce sont ces fameuses réglettes qui lui permettront de marcher et quelquefois de courir de découverte en découverte. Loin d'arrêter le chemin vers l'abstraction comme on serait porté à le croire, elles lancent sur des pistes insoupçonnées. Il y a seulement trois mois j'aurais trouvé « inconvenant » de parler de puissances à des élèves du primaire; avec les réglettes rien de plus commode en même temps que de plus adapté à la structure des mathématiques. On est porté à couper le primaire du secondaire alors qu'il y a là un tout et je crois qu'un élève qui a bénéficié de la méthode est solidement équipé pour continuer ses études comme on dit vulgairement.

C'est chaque jour que je suis le témoin de la joie des élèves en train de découvrir par eux-mêmes les faits mathématiques. L'heure du calcul est attendue et même souvent c'est une déception générale d'entendre la sonnerie qui annonce la récréation.

Les quelques expériences que je vais livrer sans prétention sont celles d'un maître qui est dans ses débuts de « conversion » car, de fait, l'usage intelligent des réglettes suppose de sa part une véritable « métanoïa », un revirement total de ses conceptions dans la pédagogie du calcul. Il s'agira en effet non d'imposer, mais de créer le climat favorable à la RECHERCHE PERSONNELLE et de guider prudemment l'enfant dans son passage du concret à l'abstrait, les manipulations étant l'OCCASION de découvertes qui iront en se multipliant. A pratiquer cette méthode on se sent éducateur selon l'étymologie du mot en ce sens qu'on aide l'enfant à dégager sa personnalité selon ses dimensions à lui et non selon un moule préfabriqué qui l'étouffe. Véritablement on l'ELEVE.

LES DIFFERENTES BASES DE LA NUMERATION

Dans le No 10 du Bulletin Cuisenaire un plan de leçon a été publié concernant les bases de la numération. D'autre part, dans le fameux livre de Madeleine Goutard, un compte rendu d'une démonstration donnée à Québec à un groupe d'enfants de 6 et 7 ans (p. 110) a été présenté *(Les mathématiques et les enfants)*. Voici un plan de leçon donnée à des élèves de 13 ans utilisant les réglettes depuis trois mois et présentée sous une optique différente.

Orientation fondamentale

Faire saisir intuitivement et expérimentalement l'ANALOGIE entre le système à base 10 et ceux qui utilisent d'autres bases.

Différentes manières de représenter 100

1. 10 Ro bout à bout « train »
2. 10 Ro côte à côte « planche »
3. Une Ro traversée par une Ro « croix »
4. 3 R ou plus qui se croisent
   $10 \times 5 \times 2$
   $5 \times 2 \times 5 \times 2$ « tour »
5. 10^2. Ro posée horizontalement sur la table et, à son extrémité — celle de gauche, par exemple — une Rr placée verticalement et donnant *l'exposant* (la *puissance*).

Ces différents modes de représentation économisent les réglettes et la forme « L » d'instinct sera réservée pour tout nombre dépassant la centaine.

$1\,000 = 10^3$ donc (Ro horizontale, Rv verticale)
$3\,000 = 3 \times 10^3$ (une réglette v traverse la Ro)
$1\,000\,000 = 10^6$

Deuxième étape

Je fais construire plusieurs trains de « L » représentant de grands nombres. Ce qui n'est pas sans passionner les élèves...

Ils *découvrent* alors que par exemple $7\,452\,363 =$
$10^6 \times 7 + 10^5 \times 4 + 10^4 \times 5 + 10^3 \times 2 + 10^2 \times 3 + 10 \times 6 + 3$

J'intercale des zéros et les enfants apportent les modifications correspondantes. Ils *expérimentent* l'importance de la place accordée au zéro. *Intentionnellement* je travaille sur un nombre comportant 2 chiffres identiques et l'enfant *constate* en observant son train de « L » que ce qui détermine la valeur de ces chiffres c'est le rang qu'ils occupent.

Troisième étape

Sans réglette. J'écris au tableau 2 345 654, les enfants lisent $10^6 \times 2 + 10^5 \times 3$ etc.

Ensuite nous dressons le tableau suivant:

10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0

Les exposants 1 et 0 sont *découverts* suivant les exigences d'une progression décroissante. Je donne alors une série de nombres et les élèves *situent* les chiffres dans le tableau.

Quatrième étape

Je fais découvrir combien on peut utiliser de chiffres pour la base 10. Tous ont admis qu'il ne faut pas dépasser 9 — qu'il faut utiliser 0 s'il y a lieu. Pourquoi ne pas dépasser 9. Ils *voient* que $10^2 \times 10 = 10^3$ donc changement de rang. Et maintenant que la structure du système décimal a été offerte à leur expérience on va glisser vers d'autres bases.

Je dis: pour me *représenter* la longueur de la classe je me sers du mètre et mentalement je forme un « train » de mètres et j'arrive à évaluer. De même, pour me représenter 2 345 654 je puis le faire grâce à 10 qui joue le rôle d'unité de mesure. Les élèves ont *constaté* que pour que le « train » ne soit pas trop long, nous groupons ces 10 par familles: famille des petits cubes,
famille des plaques: 10^2,
famille des cubes: 10^3,
et que chaque famille comporte 9 membres au maximum.

Le mètre est-il la seule unité de mesure ? Non, l'unité varie avec la distance à évaluer. Le km mesurera les grandes distances, etc. De même pour évaluer les *quantités* je puis utiliser d'autres bases que 10...

10 est détrôné et 5 est élu. $20 = 10 \times 2$ et aussi 4×5. 4 réglettes jaunes me donnent la même idée de 20 que 2 R orangées.

En se référant au système décimal les élèves découvrent qu'on peut dresser le tableau suivant:

5^5	5^4	5^3	5^2	5^1	5^0

Seul 10 est changé, les puissances sont dans leur case respective. Le mode de groupement des jaunes est le même que celui des orangées.

Combien de chiffres peut-on utiliser pour chaque case et les élèves de répondre: 0 1 2 3 4. Pourquoi ne pas dépasser 4 ? $5^2 \times 5 = 5^3$, donc changement de rang. Ceci admis, je remplis le tableau de *diverses* manières et les élèves dictent spontanément (pour l'exemple ci-dessous): $3 \times 5^3 + 2 \times 5^2 + 4 \times 5 + 2$.

5^5	5^4	5^3	5^2	5^1	5^0
		3	2	4	2

Je leur dis: peut-on lire trois mille deux cent etc. Non parce que 3 ne représente pas des « mille », etc. Le besoin se fait alors *sentir* d'une lecture adéquate, je décide: trois, deux, quatre, deux, en base 5.

Construisons maintenant le train des « L »... et ils *découvrent* une structure analogue à celle du système décimal.

Maintenant nous allons convertir ce train de « L » en base 5 en un autre train en base 10, c'est-à-dire que nous allons voir à quel nombre il correspond dans le système décimal.

Les élèves calculent: $3 \times 125 + 2 \times 25 + 4 \times 5 + 2 = 547$.

Construisez un train en base 10 représentant 547.

Constatations

1. Même groupement;
2. le train 5 est plus long que le train 10 pour le même nombre — donc plus la base est petite plus le nombre sera long. Si j'évalue la distance Berne - Tokio avec des mètres le nombre sera plus long qu'avec des kilomètres.

Une série d'exercices passionnants peuvent être greffés sur cette leçon; l'imagination en fournira à profusion. Les réglettes ne seront plus utilisées; elles nous ont permis l'intuition des structures. C'était leur but et maintenant l'esprit jongle avec les chiffres dans l'abstrait mais avec une JUSTE REPRESENTATION des quantités dénombrées.

LES NOMBRES EN COULEURS

Numéros 1 à 10
(avril 1962 — novembre 1963)

Index analytique

Chaque mot-index est suivi d'un chiffre romain indiquant le numéro du bulletin et d'un chiffre arabe, celui de la page.

Les titres des articles sont en caractères gras, les noms propres en capitales.

BIBLIOGRAPHIE
POUR LA MÉTHODE «LES NOMBRES EN COULEURS»

Initiation à la méthode. Livre du maître. *Cuisenaire G.* et *Gattegno C.* 5 fr. 50

Guide introductif. *Gattegno C.* A l'usage du corps enseignant primaire. 3 fr. 50

Eléments de mathématiques modernes par les Nombres en couleurs. *Gattegno Caleb.* A l'usage du corps enseignant primaire. 6 fr. 50

Leçons de calcul. *Cuisenaire Georges.* Pour la 2e année et les degrés moyen et supérieur primaires. Livre à l'usage du maître. 7 fr. 50

Livret de fiches de calcul. *Cuisenaire G.* **1re année.** 1 fr. 20 **2e année.** 1 fr. 75

Dans la série « **Mathématiques avec les Nombres en couleurs** », *Gattegno Caleb:*

Manuel A. **Les nombres de 1 à 20.** Pour classes élémentaires. 4 fr. 50

Manuel B. **Les nombres jusqu'à 1000, procédés de calcul, groupes, prix de vente, bénéfice, etc.** 4 fr. 50

Manuel 5. **Fractions ordinaires et décimales. Pourcentages.** 3 fr.

Manuel 6. **Les nombres et leurs propriétés.** 3 fr. 50

Manuel 7. **Les unités de mesure et le système métrique.** 3 fr. 50

Manuel 8. **Problèmes et situations quantitatives.** 3 fr. 50

Manuel 9. **Algèbre et géométrie pour les écoles primaires.** 4 fr. 50

Enfin, Freddy comprend l'arithmétique. *Gattegno Caleb.* 5 fr. 50

Les mathématiques et les enfants. *Goutard Madeleine.* 12 fr.

Conseils pratiques aux maîtres primaires pour l'enseignement par les Nombres en couleurs. *Goutard M.* (à paraître en 1964)

ÉDITIONS DELACHAUX ET NIESTLÉ, NEUCHATEL

Tout ceci fait tomber les objections de ceux qui croient que les réglettes sont un obstacle à l'abstraction alors qu'elles en sont l'occasion et qu'elles permettent d'entrevoir une foule de possibilités qui échapperaient sans ce merveilleux matériel.

Pour terminer, comment convertir un nombre en base 10 dans une autre base ?

Conversion d'un nombre en base 10 dans une autre base

Plaçons les élèves dans une situation de découverte en leur permettant de manipuler: Construisez un train de « L » en base 2 représentant 30 en base 10. Plusieurs élèves, d'instinct, se munissent de 15 rouges, ce qui fera 30. Alors se pose le problème du groupement. Après plusieurs tâtonnements, l'ensemble de la classe opère les groupements adéquats: un double cube (8 rouges); un cube (4 rouges); une « planche » (2 rouges), ce qui fait le compte. L'analogie avec le système décimal a été respectée.

Chacun alors de dresser le tableau suivant:

2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
1	1	1	1	0

aucune difficulté pour saisir l'importance du zéro... et tous écrivent le résultat: 30 en base 10 = 11110 en base 2.

Mais ces manipulations ne sont pas toujours possibles avec des bases plus grandes et des nombres plus longs, aussi un procédé nouveau s'impose-t-il. Ensemble nous le trouverons.

Ex.: 425 en base 10 = ... en base 5.

1. Je dresse le tableau:

5^4	5^3	5^2	5^1	5^0
625	125	25	5	1

2. Parmi ces puissances de 5, quelle est celle qui s'approche le plus de 425 ? (en dessous) 5^3.
3. Combien de fois est-elle contenue dans 425 ? Réponse: 3 fois, j'écris 3 sous 5^3.
4. Que font 3×5^3 ? $3 \times 125 = 375$.
5. Que reste-t-il de 425 ? $425 - 375 = 50$.
6. Parmi les puissances de 5, quelle est la plus approchante de 50 ? 5^2.
7. Combien de fois 25 est contenu dans 50 ? 2 fois. J'écris 2 sous 5^2.
8. Nous avons donc 425 en base 10 = $\begin{matrix} 5^3 & 5^2 & 5^1 & 5^0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{matrix}$ = 3 2 0 0 en base 5.

Finalement construisons les deux trains correspondants (des bases 10 et 5 pour le nombre envisagé) et... la « conversion » en blanches fait éclater l'identité de ces 2 nombres « pensés » avec des bases différentes.

Nicolas Savary
Ecole catholique du Valentin
Lausanne

REDUCTION AU MEME DENOMINATEUR

Leçons effectivement données à des élèves de 7e année primaire, 13 et 14 ans, ayant utilisé les réglettes depuis trois mois.

Première étape

LES NOMBRES PREMIERS. — L'élève prend les 10 réglettes du clavier Cuisenaire. Il les dispose sur la table et se livre au travail suivant: essayer, pour chaque réglette, de composer autant de lignes de *même couleur* et, bien entendu, de même longueur que la réglette considérée.

Rb,	1 ligne:	faite avec 1 Rb
Rr,	2 lignes:	l'une faite avec 1 Rr
		l'autre faite avec 2 Rb
. . .		
Rf,	4 lignes:	1 Rf
		2 Rv
		3 Rr
		6 Rb

Constatations

La Rb est divisée par elle-même.
La Rr est divisée par elle-même et par la Rb.
. . .
La Rf est divisée par elle-même, par les Rv et r et par la Rb.
Certaines R (b, r, v, j, n) ne sont divisées *que* par elles-mêmes et par la Rb.

Pourrions-nous agrandir la famille de ces longueurs (qui correspondent aux nombres 1, 2, 3, 5 et 7) ?

Oui. Essais avec 11, 13, 17...

Conclusion: Les nombres 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 sont des *nombres premiers.*

Deuxième étape

6 = ? Réponse: 3 × 2 et 2 × 3. Construisons la croix correspondante; je pourrais très bien construire un plancher, il faudrait plus

de réglettes d'une part et d'autre part cela nuirait à la présente démonstration.

Cette croix offre la « vision » d'un nombre décomposé en ses facteurs premiers: $12 = ?$; 4×3; 6×2. Adoptons 4×3. Croix qui le représente. Arrangez-vous pour ne mettre dans cette croix que des nombres premiers. Immédiatement 4 est remplacé par 2×2 et nous avons un étage de plus, ce qui offre la forme d'une tour composée de r, r, v. 12 a été décomposé en ses facteurs premiers, or $2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3$.

Exercices divers de construction: Je donne une série de nombres que l'élève doit représenter sous forme de tour ne comportant que des n.p. Par tâtonnements successifs il élimine progressivement les nombres qui ne sont pas premiers. Après plusieurs constructions le *besoin* se fait sentir d'utiliser un procédé plus méthodique.

Je divise le nombre donné par le plus petit n.p. et je passe au suivant après épuisement. Les élèves comprennent que nous procéderons ainsi avec ordre et sans rien oublier. Ce qui donne pour $24 = 2^3 \times 3$.

Pour terminer cette permière leçon je propose une série de nombres que les élèves décomposeront en facteurs premiers sans utiliser de réglettes, celles-ci ayant atteint leur but qui, dans le cas présent, était de leur offrir la « vision » de la structure interne des nombres.

Troisième étape

Objectif: introduction de la division.

Expérimentation: Construisez la tour correspondant à 32. Nous avons une tour à 5 étages, 2^5. Enlevez une rouge. Que reste-t-il ? 16. Rapport entre 16 et 32. La moitié. Qu'avons-nous fait ? Divisé en deux.

2e expérimentation: Construire la tour représentant 45. Nous avons $3^2 \times 5$. Enlevez 5. Que reste-t-il ? 3^2 ou 9. Qu'avons-nous fait ? Divisé par 5. Le mécanisme de la division est « visualisé ».

Après plusieurs constructions nous concluons tout simplement que pour diviser 2 puissances d'un même nombre, il suffit de *soustraire* les exposants. Ce qui est parfois difficile à faire admettre à des élèves de l'enseignement secondaire !

Quatrième étape

PLUS PETIT COMMUN MULTIPLE. — Je donne 25 et 36. Décomposer en facteurs premiers et construire les deux tours correspondantes. Nous avons: $25 = 5^2$ et $36 = 2^2 \times 3^2$. Construisez une troisième tour qui puisse contenir *à la fois* les deux premières et qui toutefois soit *la plus petite possible.* Ici soyons assez patients pour laisser expérimenter. On est si vite tenter « pour gagner du temps » d'expliquer, c'est-à-dire d'entraver la recherche personnelle. Les élèves ont construit d'eux-mêmes la tour qu'il fallait, laquelle a été formée de 2 jaunes, 2 rouges et 2 vert clair.

De cette troisième tour je puis *enlever* la 1re, ce qui revient à dire que je puis diviser la 3e tour (qui est un multiple) par la 1re. Je puis opérer de même avec la 2e tour.

Avant de dégager la règle qui permettra de construire la 3e tour rapidement, je donne une série de couples de nombres pour lesquels on construira la troisième tour. Alors les élèves CONSTATENT que le P.P.C.M. de plusieurs nombres est formé de *tous* les facteurs premiers de ces nombres affectés de leur *plus grand* exposant. Cette série de manipulations n'est pas comparable avec l'étude purement verbale qu'on fait souvent.

En conclusion, et cette fois sans réglettes, une série d'exercices sur la recherche du P.P.C.M. de 2 ou plusieurs nombres.

Sixième étape

Division rapide des P.P.C.M. par les nombres donnés. Je reprends 36 et 48. Recherche du P.P.C.M.: a) construire les 3 tours; b) factorisation verticale. Nous trouvons: $36 = 2^2 \times 3^2$; $48 = 2^4 \times 3$; P.P.C.M. $= 144 = 2^4 \times 3^2$. D'après ce qui a été expérimenté précédemment $2^4 : 2^2 = 2^2$.

Nous disposons comme suit:

$$\frac{144}{36} = \frac{2^4 \times 3^2}{2^2 \times 3^2} = \frac{\text{tour du P.P.C.M.}}{\text{tour de 36}}$$

et d'eux-mêmes, sans difficulté, ils trouvent $144 : 36 = 2^2 = 4$; et l'on procède de même pour $144 : 48$.

Nous pouvons maintenant donner une série d'exercices du genre de celui-ci:

28 36 1. Trouver le P.P.C.M. de ces 2 nombres.
2. Le quotient du P.P.C.M. par chacun de ces 2 nombres.

Septième étape

Enfin, les élèves ont assez de maîtrise pour aborder avec succès la réduction de plusieurs fractions au même dénominateur. Evidemment cela suppose qu'ils ont déjà compris l'équivalence des fractions. La méthode Cuisenaire est des mieux appropriée pour en faire saisir le mécanisme.

Je tiens à noter que tous mes élèves sans exception ont, par ce procédé, réduit au même dénominateur des fractions aux termes formés de très longs chiffres et cela sans hésitation.

Nicolas Savary
Ecole catholique du Valentin
Lausanne