LES MODÈLES RÉDUITS : COMMENT DES CONSIDÉRATIONS SUR LA MASSE D'UN OBJET PERMETTENT D'APPROFONDIR LA RÉFLEXION SUR LA PROPORTIONNALITÉ.

Laura Weiss[1]

LE PROBLÈME

Le problème proposé ci-dessous est conçu pour des élèves de 9e année (11e HarmoS) dans le cadre du cours de mathématiques. Il est lancé par une petite question-amorce qui s'appuie sur une carte postale de la tour Eiffel et d'un modèle de celle-ci : pourquoi les modèles réduits de la tour Eiffel sont-ils toujours aussi peu élégants ? Il continue avec la distribution de l'énoncé ci-dessous :

La tour Eiffel mesure 324 m et pèse 10'000 tonnes dont 7'300 tonnes de charpente métallique[2]. On en a fait un modèle réduit métallique de 30 cm de hauteur.[3]

1. **Combien pèserait ce modèle réduit de la tour Eiffel ?**
2. **Quelles remarques ce résultat appelle-t-il ?**

Fig. 1 : La tour Eiffel[4]

Fig. 2 : Un modèle réduit de la tour Eiffel[5]

1 Laura.weiss@unige.ch
2 http://fr.wikipedia.org/wiki/Donn%C3%A9es_techniques_de_la_tour_Eiffel
3 Nous avons trouvé mention de ce problème, présenté autrement, sur le site http://www.etab.ac-caen.fr/le-castillon/IMG/pdf/Agrandissement_Reduction_-_Cours.pdf (théorie) et http://www.etab.ac-caen.fr/le-castillon/IMG/pdf/Pyramides_et_Cones_-_Agrandissement_et_reduction_-_Serie_0.pdf (exercices) Dans les deux cas, la question n'est pas la même. Le site mentionne justement que la question inverse (trouver la hauteur du modèle réduit à partir d'un modèle réduit pesant 1 kg) a fait l'objet d'un « concours Kangourou » et que le taux de réponses correctes diminue avec le degré scolaire des élèves : 11 % en 6ème (12 ans), 10% en 5ème (13 ans), 7% en 4ème (14 ans) et seulement 6% en 3ème (15 ans). Relevons que, dans la théorie, il est commenté que puisque le modèle réduit pesant 1 kg mesure 1,5 m, la tour Eiffel est très légère.
4 http://fr.wikipedia.org/wiki/Tour_Eiffel
5 http://eu.art.com/products/p8112534241-sa-i5197670/posters.htm

En voici la solution attendue :

1. En arrondissant la hauteur de la tour Eiffel à 300 m, le modèle réduit de 30 cm est 1000 fois plus petit, sa masse sera donc $(10^3)^3$ fois inférieure, ce qui donne 7,3 $10^6 : 10^9 = 7{,}3\ 10^{-3}$ kg = 7,3 g.
2. Il est difficile de faire un objet métallique de 30 cm de haut pesant 7 grammes, voilà pourquoi les modèles réduits sont toujours si peu élégants ! En particulier les poutrelles métalliques qui mesurent quelques dizaines de centimètres d'épaisseur devraient dans le modèle réduit être épaisses de quelques dixièmes de millimètre ce qui pose, entre autres, un problème de facture et de rigidité.

GESTION EN CLASSE ET DIFFICULTÉS DES ÉLÈVES

Ce problème de proportionnalité a été proposé plusieurs fois en tant que situation-problème au CO genevois, dans le chapitre proportionnalité, après l'enseignement des volumes. Il a aussi été traité au cours de physique avec des élèves de 9e année, dans le chapitre portant sur la masse volumique[6].

La gestion de classe s'est déroulée selon un schéma classique pour des situations-problèmes : après un moment de lecture et d'appropriation individuelle du problème, avec possibilité pour les élèves de poser des questions d'explicitation, l'enseignante les a placés en petits groupes de trois ou quatre avec la consigne de chercher ensemble la solution. Comme on le verra dans la description des difficultés rencontrées, ce problème se prête particulièrement bien à la démarche de travail de groupe, car c'est souvent un élève dans un groupe qui réagit au résultat trouvé et qui remet en cause les calculs. C'est au moment où au moins un groupe a trouvé le résultat de 7,3 grammes que la classe est remise en grand groupe pour mettre en commun les réponses puis mener une discussion collective sur la plausibilité du résultat.

6 On se réfère ici à des expérimentations datant d'avant le nouveau curriculum de physique du CO de 2003 (pour les 9e années).

La première difficulté rencontrée par les élèves est liée au changement d'unités entre mètres et centimètres : par exemple, un groupe a considéré que le modèle réduit était dix fois plus petit que l'original (de 300 à 30) et a trouvé comme résultat 730 tonnes. Cette valeur leur apparaissant impossible, ils ont rapidement trouvé leur erreur dans l'oubli de la cohérence des unités. Hélas, la division par 1000 (de 30000 cm à 30 cm) les a amenés, comme la majorité des autres groupes, à la réponse 7,3 tonnes, qui n'était pas plus plausible aux yeux de la majorité[7]. Face à ce résultat, beaucoup d'élèves se sont mis à la recherche d'une erreur de calcul (ou d'unités de masse dans la transformation des tonnes en kilogrammes), sans grand succès.

A ce moment, l'enseignante fait circuler un modèle de tour Eiffel parmi les élèves. Cela suffit à certains pour réaliser que ce n'était pas seulement la hauteur qui avait été réduite, mais aussi les deux autres dimensions, largeur et longueur de la base. Ils ont alors divisé les 7300 tonnes par $(1000)^3$ et ont obtenu 7,3 grammes. La majorité des élèves est alors très satisfaite d'avoir rempli le contrat, à savoir trouver la masse du modèle réduit, et arrête là son travail. Parfois quelques élèves montrent leur étonnement et revérifient les calculs en écrivant tous les zéros et en faisant un tableau de transformation d'unités pour passer des kilogrammes aux grammes : 7'300'000 kg : 1'000'000'000 = 0,0073 kg = 7,3 g.

La classe est alors invitée à une phase de travail collectif. D'abord chaque groupe présente son résultat et sa démarche. Si certains groupes en sont restés au premier résultat de 7,3 tonnes, le raisonnement sur le volume convainc généralement toute la classe. On pourrait alors

7 Selon les années, il se trouvait des groupes se considérant tout à fait satisfaits du résultat de 7,3 tonnes, au point qu'il était difficile d'obtenir une poursuite de la réflexion suite à l'injonction « êtes-vous sûrs de votre résultat ? ». Dans ces cas, ils découvraient lors de la mise en commun que leurs camarades avaient considéré que ce résultat était impossible.

considérer que le problème est clos, comme dans le texte du site cité en note 2, en se contentant de ce résultat parfaitement correct du point de vue de la proportionnalité, mais pour le moins surprenant du point de vue de la réalité.

Pour travailler avec les élèves non seulement l'application de la proportionnalité entre la masse et le volume mais aussi, dans ce cas, la réalisabilité concrète de la proportionnalité entre objet réel et son modèle, l'enseignante fait à nouveau circuler le modèle réduit apporté (et qui ne mesure qu'environ 10 cm de haut) et un poids calibré de 10 g en demandant aux élèves de soupeser les deux. Il n'y a alors pas de doute, le petit modèle réduit pèse plus que 10 grammes. La discussion s'engage et l'observation de la photo de la tour Eiffel et du modèle réduit permet de constater l'élégance de l'une et la lourdeur de l'autre. Certains élèves soulignent alors la quantité de vide de la charpente métallique de la tour Eiffel qui ne se retrouve pas dans le modèle réduit. Une observation plus fine de la photo de la tour Eiffel permet aux élèves de constater que celle-ci est constituée de poutrelles métalliques dont l'épaisseur de quelques dizaines de centimètres ne peut être réduite de 1000 fois au risque de devenir aussi fine qu'un cheveu. Cette réflexion peut se prolonger par l'observation d'autres modèles réduits, typiquement de voitures, qui font apparaître, quand on y pense, qu'il n'est pas possible de réduire l'épaisseur de la tôle d'acier des portières dans la même proportion que la longueur de la voiture.

LES CLASSES DE PHYSIQUE

Les élèves des classes de physique ne réussissent pas mieux ce problème que leurs camarades en mathématiques. En effet, l'appel à la notion de masse volumique vient compliquer la résolution du problème plutôt que de leur permettre de mieux s'en sortir. Typiquement deux autres démarches apparaissent : certains élèves inventent une nouvelle grandeur, la masse par hauteur, qu'ils pensent pouvoir substituer à la masse volumique. Ils calculent donc le rapport de la masse à la hauteur de l'original, c'est-à-dire 7'300 tonnes divisées par 300 m, puis multiplient ce rapport par la hauteur du modèle et trouvent … 7,3 tonnes, pour autant qu'ils ne fassent pas d'erreur de transformation d'unités. D'autres, oubliant l'original, partent la masse volumique de l'acier ou du fer de 7860 kg/m^3 mais n'ont pas moyen d'estimer le volume du modèle. Les plus imaginatifs qui proposent une estimation basée sur une pyramide de 30 cm de hauteur de base carrée de 10 cm (la tour Eiffel a une base de soutènement carrée de 125 m de côté) donnant un volume de 1000 cm^3 et une masse de 7,86 kg, se trouvent ensuite empruntés pour faire le lien avec la masse de l'original. Qui plus est, le résultat semble à tous trop important. S'il a l'intérêt de faire revenir sur la légèreté de la construction de la tour Eiffel, il ne mène toutefois pas à une valeur réaliste pour la masse du modèle réduit.

CONCLUSION

Comment caractériser ce que les élèves ont appris de cette activité ? Tout d'abord, ils n'ont pas perfectionné leur technique de calcul des situations proportionnelles : le rapport de l'original au modèle a volontairement été choisi simple pour que d'éventuelles difficultés de calcul ne viennent pas se substituer à la réflexion sur les résultats. Dun coup, il est logique d'utiliser le rapport entre grandeurs de même nature, de l'original au modèle, mais cela induit peut-être la première hypothèse abusive de proportionnalité, à savoir que le rapport des hauteurs est égal au rapport des masses, ce qui est renforcé par le fait que la tour Eiffel a une dimension privilégiée, sa hauteur.

Le premier résultat trouvé ainsi a réellement un effet de choc sur les élèves : 7,3 tonnes ne peut être la masse d'un modèle réduit de 30 cm ! Mais leur première réaction est la recherche d'erreurs de calcul et non de raisonnement. Notre constat est que c'est vraiment l'observation de l'objet physique qui déclenche le raisonnement sur la proportionnalité masse-volume. L'enseignante avait d'ailleurs, lors d'une utilisation de cette activité en classe, ajouté l'information sur la base de soutènement carrée de 125 m de côté de la tour Eiffel dans l'idée que les élèves penseraient qu'il y avait d'autres dimensions en jeu à côté de la hauteur. Non seulement cet ajout de données n'avait pas eu d'impact, mais il avait compliqué, pour certains élèves, le choix des données pertinentes. En effet comme ils n'avaient pas les dimensions de la base du modèle réduit, cette information supplémentaire ne leur était pas utile. Or si le choix des données à prendre en compte pour résoudre un problème est l'un des objectifs importants du cours de mathématiques au CO, il ne faut pas vouloir poursuivre trop d'objectifs à la fois avec une activité donnée. En outre, la relative concision de l'énoncé nous semble un point fort de ce problème.

Le deuxième résultat obtenu, 7,3 grammes, est quant à lui, mathématiquement correct, mais à notre avis, il est important d'en discuter la réalisation pratique, pour poursuivre un autre objectif de l'enseignement des mathématiques, à savoir l'exercice « d'un regard critique sur le résultat obtenu » (PER, p. 19). Ici un questionnement surgit relativement facilement à cause de la valeur excessivement faible du résultat. Selon le Plan d'Etudes Romand, le domaine mathématiques et sciences de la nature « fournit à l'élève des instruments intellectuels d'appréhension et de compréhension du réel et d'adaptation à ce dernier ». Pour ce faire, il s'agit bien que les élèves apprennent non seulement des règles ou des principes - qui seraient, dans le cadre de ce problème : « Dans des dessins à l'échelle : lorsque les longueurs sont multipliées par n (ou divisées par n), les aires le sont par n^2 ; les volumes le sont par n^3 » (Bodin, 1989, p.39) - ainsi que leur application – puisque la hauteur est réduite mille fois, le volume et donc la masse le seront un milliard de fois – mais encore à analyser l'effet de l'application de ces règles. Si la modélisation d'une situation peut être vue comme la mise en correspondance de deux systèmes (Dorier & Burgermeister, 2012), qui sont ici, d'une part le monde réel de la tour Eiffel et de son modèle et, d'autre part le monde abstrait mathématique des règles de la proportionnalité dans lequel le problème peut être résolu, c'est au moment où le résultat mathématique est réinjecté dans le monde réel comme une réponse qu'il faut s'interroger à nouveau sur son adéquation à la situation. Ainsi, le cas proposé ci-dessus nous semble un banc d'essai pertinent pour amener les élèves à porter un regard critique sur les limites de la modélisation choisie.

RÉFÉRENCES

Bodin, A. (1989). *Les échelles, préparation d'une situation d'enseignement en classe de cinquième*. Accès : http://www-irem.ujf-grenoble.fr/revues/revue_x/fic/20/20x3.pdf, consulté le 9.11.2011.

Dorier J.-L. & Burgermeister P.-F. (2012). *Modelling: a federating theme in the new curriculum for mathematics and sciences in Geneva compulsory education (age 4 to 15)*. Communication à présenter à ICME -12. The 12th International Congress on Mathematical Education. Séoul, Corée, 8-15 juillet 2012.

Plan d'études romand (PER). *Domaine mathématiques et Sciences de la nature. Cycle 3*, version 2.0/ 27 mai 2010. CIIP 2010. Accès : http://www.plandetudes.ch/web/guest/specification?domainId=68&&courseId=283&&cycleId=36&&thematicId=453&&objectiveId=1548 consulté le 9.11.2011