Autour du concept de propriété

Sylvia Coutat

Université de Genève

Cet article présente une analyse du concept de propriété qui est ensuite croisée avec l'étude des ressources officielles disponibles pour les enseignants du secondaire 1[1] de Genève. Cette proposition d'analyse du concept de propriétés ne définit pas une séquence d'enseignement mais devrait susciter des pistes de réflexion chez les enseignants.

Le Raisonnement déductif

Nous appelons raisonnement déductif un raisonnement particulier de la démonstration, elle-même étant un type de preuve particulier (Balacheff, 1982). Le *raisonnement déductif*, est largement utilisé dans les validations et justifications en géométrie. Il s'organise autour de pas de déduction construits sur des énoncés validés par l'institution (classe ou mathématiciens) tels que propriétés ou théorèmes qui sont appelés des énoncés-tiers :

> *L'organisation d'un pas de déduction (…) permet d'effectuer une opération très particulière : une partie de l'énoncé-tiers (celle qui est parfois introduite par « alors.. ») est « détachée » comme conclusion du pas de déduction, après vérification que les prémisses correspondent bien à l'autre partie de l'énoncé-tiers (celle qui est parfois introduite par « si… »). (Duval & Egret, 1993, p. 121)*

Une représentation schématique pourrait-être la Figure 1.

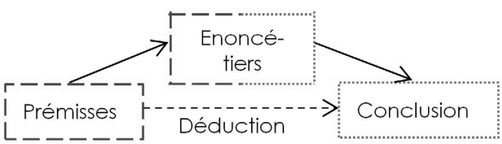

Figure 1

1 *Élèves de 12 à 15 ans.*

Voici un exemple de raisonnement déductif contenant un pas de déduction :

ABCD et DCEF sont deux parallélogrammes. Que pouvez-vous dire des droites AB et FE ?

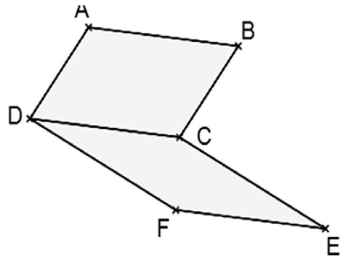

Figure 2

Une solution possible :

Comme ABCD est un parallélogramme, les droites AB et DC sont parallèles. De même comme DCEF est un parallélogramme, les droites DC et EF sont parallèles. Or si deux droites sont parallèles à une même troisième droite, ces deux droites sont parallèles. AB et EF sont deux droites parallèles à DC, elles sont donc parallèles.

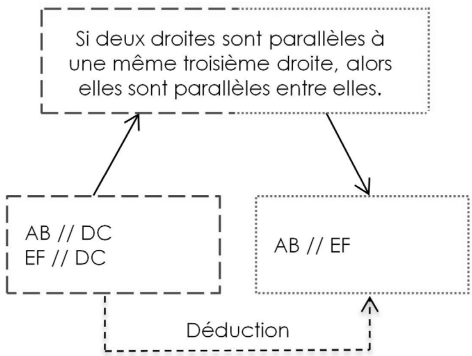

Figure 3

Nous appelons propriétés, l'ensemble des énoncés mathématiques, dans lesquels est établie la nécessité mathématique d'un énoncé-conclusion à partir d'énoncés choisis comme hypothèse. Ces énoncés sont au cœur des pas de déduction et donc au cœur du raisonnement déductif, c'est pour cela que cet article se focalise sur ce type d'énoncé, l'objectif étant de proposer une analyse du concept de propriétés dans la perspective de développer d'éventuels outils qui permettraient de réinvestir les propriétés dans un pas de déduction.

Reconnaissance des propriétés

Dans une précédente recherche, (Coutat, 2005) nous avons testé les capacités d'élèves français de 14 ans à reconnaître des propriétés géométriques et à les distinguer. Ces tests ont révélé que les élèves avaient des difficultés à distinguer une propriété de sa réciproque ainsi qu'à identifier les données (contraintes) et la conclusion dans l'énoncé. Nous en concluons que la compréhension d'une propriété dépasse la simple connaissance des mots, elle doit prendre en compte l'articulation entre eux.

La suite de l'article s'appuie sur une autre recherche (Coutat, 2006) à propos de l'enseignement de propriétés géométriques avec des élèves de 12-13 ans. L'hypothèse de travail est que l'enseignement des propriétés doit permettre aux élèves de travailler la relation entre les contraintes (données) et la conclusion pour qu'ils les utilisent de façon plus adéquate dans un pas de déduction.

Le concept de Propriété

Afin de caractériser le concept de *propriété géométrique*, nous utilisons les travaux de Vergnaud (1990) sur les champs conceptuels. Ainsi un concept se caractérise par un triplet de trois ensembles :

- *l'ensemble des situations qui donnent du sens au concept (la référence)* ;

- *l'ensemble des invariants sur lesquels reposent l'opérationnalité des schèmes (le signifié)* ;

- *l'ensemble des formes langagières et non langagières qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés, les situations et procédures de traitement (le signifiant). (Vergnaud, 1990, p.145)*

Cette caractérisation qui se veut la plus générale possible sera exemplifiée par la propriété P :

Si un parallélogramme a un angle droit, alors c'est un rectangle.

L'ensemble des situations

Nous avons identifié trois sous-ensembles de situations qui peuvent donner du sens au concept de propriété géométrique : les situations d'illustration, les situations de validation, dans lesquelles la propriété est démontrée et les situations d'énoncés-tiers, dans lesquelles la propriété est utilisée pour démontrer d'autres résultats.

Les situations d'illustration

Dans ce premier ensemble, nous considérons les situations qui visent la « découverte visuelle » d'une nouvelle propriété.

Exemple :

- Construis deux segments AB et AD perpendiculaires en A.
- Construis le point C tel que ABCD soit un parallélogramme.
- Que peux tu observer à propos du parallélogramme ABCD ?

Ces situations permettent une première confrontation à la propriété et peuvent éventuellement susciter une surprise lors de l'apparition de la conclusion.

Les situations de validation

Dans ce deuxième ensemble, nous considérons les situations dans lesquelles les propriétés sont prouvées, soit par une preuve pragmatique, soit par une démonstration (Balacheff, 1987).

Exemple par la démonstration de la propriété P :

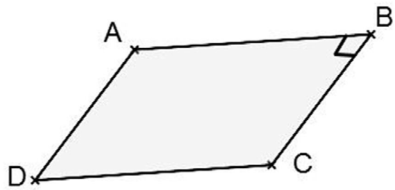

Figure 4

ABCD est un parallélogramme et l'angle ABC est un angle droit.

Dans un parallélogramme, les angles opposés sont égaux, ainsi si un angle est droit, l'angle opposé l'est aussi. Comme l'angle (ABC)est un angle droit, on en déduit que l'angle (ADC) est un angle droit.

Lorsque deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre. Les côtés AB et DC sont parallèles, et le côté AD est perpendiculaire au côté DC donc il est aussi perpendiculaire au côté AB. L'angle (DAB) est un angle droit.

Dans un parallélogramme, les angles opposés sont égaux, ainsi si un angle est droit, l'angle opposé l'est aussi. L'angle (DAB) est un angle droit, on en déduit que l'angle (BCD) est un angle droit.

Le parallélogramme ABCD a 4 angles droits, c'est un rectangle.

On pourrait envisager une preuve pragmatique de la propriété P qui s'appuie sur la construction d'un parallélogramme avec des barres métalliques (style Meccano®). En déformant le parallélogramme et ne contrôlant qu'un seul angle, on se rend compte qu'il n'est pas possible de le déformer de façon à obtenir un seul angle droit.

Les situations d'énoncés-tiers

Ce dernier ensemble de situations rassemble les situations dans lesquelles la propriété est utilisée comme énoncé-tiers dans un pas de raisonnement.

Exemple :

- Construis ABCD un losange dont les diagonales se coupent en O.
- Construis la droite d, parallèle à BD passant par A.
- Construis la droite e, parallèle à AC passant par D.
- Les droites d et e se coupent en F.
- Quelle est la nature du quadrilatère AODF ? Justifie ta réponse.

Une solution possible :

DF est un segment de e qui est parallèle à AO donc DF est parallèle à AO. AF est un segment de d qui est parallèle à OD donc DF est parallèle à AO. AODF a deux paires de côtés parallèles, c'est un parallélogramme. ABCD est un losange et O est le point d'intersection de ses diagonales qui se coupent perpendiculairement, l'angle (AOD) est un angle droit. Si un parallélogramme a un angle droit alors c'est un rectangle. Le parallélogramme AODF a un angle droit, alors c'est un rectangle.

Les situations d'énoncé-tiers permettent de donner du sens à des propriétés par l'utilisation de celles-ci dans des pas de déduction.

L'ensemble des invariants

Dans la situation d'illustration ou la preuve pragmatique de P, on voit que les quatre angles sont droits sans qu'il puisse en être autrement et simplement en imposant un seul angle. Cette dépendance de la conclusion aux contraintes, ici un angle droit, est présente pour toutes les propriétés telles que nous les avons définies. C'est en fait cette dépendance qui est visualisée, décrite, montrée ou démontrée à travers les différentes situations. Ainsi l'ensemble des invariants se réduit à une relation spécifique qui relie les contraintes à la conclusion. Nous définissions cette relation comme une **relation de subordination** entre un ensemble de données, les contraintes et un ensemble de résultats, la conclusion.

L'ensemble des formes langagières

Nous distinguons deux catégories de signifiants : les signifiants du registre discursif et les signifiants du registre graphique.

Registre discursif

Nous avons identifié deux principales formulations de la relation de subordination entre les contraintes et la conclusion.

La première formulation est la formulation experte qui s'appuie sur les marques *si* et *alors*. Cette formulation est très courante car elle permet très rapidement d'identifier les contraintes et la conclusion dans un énoncé en s'appuyant sur les indicateurs *si* et *alors* : Si un parallélogramme a un angle droit, alors c'est un rectangle.

La deuxième formulation est la formulation temporelle qui s'appuie sur une chronologie pour exprimer la relation de subordination : *un parallélogramme deviendra un rectangle lorsqu'il aura un angle droit*, ou *lorsqu'un parallélogramme a un angle droit il deviendra un rectangle*. Cette formulation peut apparaître plus souvent à l'oral qu'à l'écrit et laisse sous-entendre une transformation au cours du temps des objets considérés dans la propriété.

D'autres formulations mixtes peuvent être envisagées utilisant une marque d'identification de la formulation experte pour les contraintes et une marque temporelle pour la conclusion ou vice-versa.

Registre graphique

Pour distinguer les contraintes et la conclusion dans le registre graphique on peut utiliser des couleurs, le rouge pour les contraintes et le vert pour la conclusion (par exemple). La Figure 5 représente P dans ce registre.

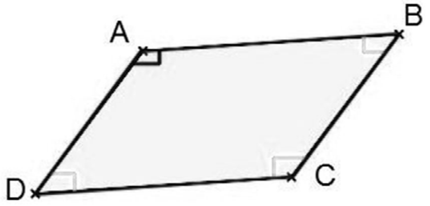

Figure 5

Une limite de la représentation statique est qu'on ne peut pas coder à la fois la contrainte (ABCD est un parallélogramme) et la conclusion (ABCD est un rectangle). Cette limite peut être dépassée en utilisant plusieurs dessins qui illustrent les différentes étapes de l'énoncé. On obtient alors une sorte de bande dessinée de la propriété, visible dans la Figure 6.

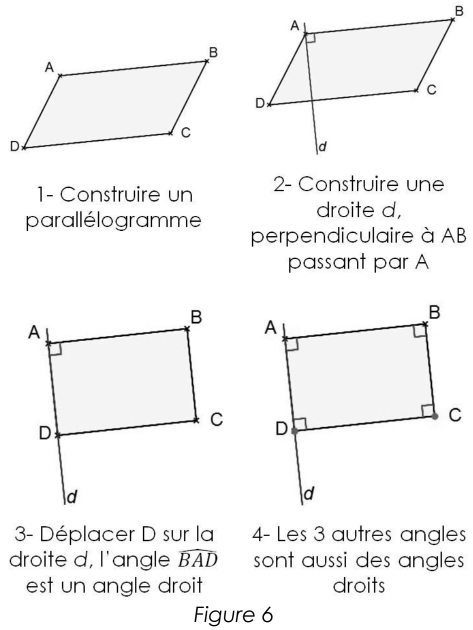

Figure 6

Cette bande dessinée peut-être animée par l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique[2]. On aura alors une représentation de la propriété dans un registre graphique dynamique.

Propriétés géométriques dans le contexte genevois

Quelques séquences d'enseignement, dans le contexte français, s'appuyant sur cette caractérisation du concept de propriété, ont été développées (Coutat, 2006). Nous ne les aborderons pas dans cet article. Nous souhaitons plutôt présenter dans quelle mesure cette caractérisation est compatible avec le contexte genevois.

Dans le Plan d'Etude Romand[3] (PER)

Le PER fait référence aux propriétés dans l'axe thématique Espace dès le cycle 2[4] : « *Poser et résoudre des problèmes pour structurer le plan et l'espace en dégageant des propriétés géométriques des figures planes (…) des solides* » (p.14). Une autre référence aux propriétés dans le champ *Figures géométriques planes et solides* apparait « *pour reconnaitre, décrire et nommer des figures planes (symétrie interne, parallélisme, isométrie)* ». Enfin une dernière référence concerne le champ *Transformations* pour « *observer les principales propriétés des transformations (variants et invariants)* ». Dans ce cycle les propriétés sont principalement identifiées visuellement à partir de dessins.

Pour le cycle 3[5], les mêmes références apparaissent, si ce n'est qu'elles ne renvoient plus à dégager les propriétés mais à les définir et les utiliser. Dans ce cycle les propriétés ne sont pas associées à des dessins mais à des figures.

Dans le PER des bribes de propriétés sont présentes (symétrie interne, parallélisme …) mais elles ne sont jamais formulées globalement.

Dans le plan d'étude genevois (2003)

Afin d'avoir plus d'information sur les différentes représentations des propriétés (les signifiants) et éventuellement les situations

2 *Attention : il s'agit de la mise en œuvre d'un déplacement mou c'est-à-dire d'un déplacement pour obtenir une configuration particulière et éphémère qui ne résiste pas au déplacement. Dans l'exemple, on ne construit pas un rectangle, on déforme un parallélogramme pour qu'il soit dans la configuration particulière du rectangle.*

3 *Plan d'Etude mis en place pour tous les cantons romands en 2011, actuellement en vigueur.*

4 *Élèves de 8-12 ans.*

5 *Élèves de 12-15 ans.*

qui leur donnent du sens (référence), nous avons consulté l'ancien plan d'étude genevois de 2003[6]. Dans la partie introductive du chapitre Géométrie, quelques propriétés géométriques sont énoncées ainsi que leurs relations avec les définitions : « *Les propriétés ci-dessous s'appuient sur les définitions suivantes* » (p. 110). Cela laisse supposer que les situations de validation relativement aux propriétés peuvent être mise en place en s'appuyant sur les définitions proposées.

Les formulations utilisées pour les propriétés sont des formulations expertes qui utilisent *si* et *alors* : « *Si un triangle possède un axe de symétrie alors il est isocèle* » (p.110). Mais ces formulations sont aussi sans marques d'identification ou indicateurs temporels : « *Les côtés opposées d'un parallélogramme sont isométriques* » (p.110). En classe de 8e (10e HarmoS[7]) une autre formulation apparaît, les conclusions des propriétés (ici pour le parallélogramme) sont détachées des contraintes : « *On en déduit les propriétés suivantes du parallélogramme :*

- *Les diagonales se coupent en leur milieu ;*
- *les côtés opposés ont la même longueur ;*
- *les angles opposés sont isométriques ;*
- *deux angles consécutifs sont supplémentaires.* » (p.114)

Nous n'avons pas considéré ces formulations pour caractériser le concept de propriété car elles n'expriment pas, de notre point de vue, la relation de subordination entre les contraintes et la conclusion. En effet avec la première formulation, contraintes et conclusion semblent être au même niveau, pour la deuxième formulation la conclusion est déconnectée des contraintes.

Dans le chapitre *Initiation à la recherche*, une référence aux propriétés apparait dans la démarche expérimentale en mathématiques pour prouver les conjectures avec une « *démonstration, basée sur des propriétés* » (p.126). On entrevoit ici l'utilisation des propriétés comme énoncés-tiers dans un raisonnement déductif, c'est-à-dire la mise en place d'une situation d'énoncé-tiers.

Dans le livre du maître des moyens d'enseignement romands de mathématiques (Mathématiques 9-10-11)

Nous avons poursuivi notre étude avec le livre du maître. Dans la rubrique recherche et raisonnement de nombreuses références aux propriétés apparaissent en lien avec la démonstration et le raisonnement déductif : « *Comme on l'a vu précédemment, il est donc essentiel que les propriétés que les élèves doivent utiliser dans les démonstrations qu'on leur propose soient parfaitement connues des élèves.* » (p.8). Les propriétés sont clairement posées comme outils pour les démonstrations, en lien donc avec les situations d'énoncés-tiers.

Dans la rubrique *Résolution de problèmes*, (p.9) les auteurs présentent un exemple de procédures de résolution s'appuyant sur le raisonnement déductif à partir d'un exercice du manuel de l'élève. Les propriétés utilisées dans la résolution sont énoncées dans une formulation experte (avec *si* et *alors*). Les auteurs présentent les difficultés quant à l'utilisation de propriétés dans une procédure de résolution, ainsi que des pistes d'aides qui proposent de développer des automatismes à travers des exercices d'entrainement (p.9) ce que nous considérons être des situations d'énoncés-tiers.

Nous n'avons pas trouvé dans ce manuel d'éléments généraux concernant l'enseignement des propriétés, les différentes formulations ou les situations autour des propriétés en dehors des exemples de résolution.

Dans l'aide-mémoire de l'élève des moyens d'enseignement romands de mathématiques (Mathématiques 9-10-11)

Dans l'index général, le mot « propriété » apparait dans « *propriétés d'une fonction linéaire* ». Dans la table des matières, apparait « *quadrilatère* », « *quadrilatères remarquables* » et « *classement des quadrilatères* », aucune entrée à propos des propriétés[8] des quadrilatères. Lorsque l'on rentre dans la rubrique *Quadrilatères remar-*

6 *Ce plan d'étude a été en vigueur jusqu'en 2010, il est connu des enseignants.*

7 *Élèves de 13-14 ans.*

8 *Une entrée Théorème renvoie aux théorèmes de Pythagore et de Thales.*

quables (p.88-89) les propriétés des quadrilatères sont présentées dans un tableau récapitulatif des caractéristiques de chaque quadrilatères en se focalisant sur :

- les côtés
- les diagonales
- les angles
- les symétries (axes, centre)

La dernière colonne « remarques » permet une première classification des quadrilatères. Cependant cette classification ne s'appuie pas sur les propriétés mais sur les inclusions de classes de quadrilatères : « *Les losanges, les rectangles et les carrés sont des parallélogrammes particuliers* » (p.88).

Dans ce tableau, les formulations utilisées se rapprochent de formulations présentées dans le plan d'étude genevois, c'est-à-dire que les conclusions sont détachées des contraintes.

Une rubrique est spécifique au classement des quadrilatères à partir d'un schéma (p.89, reproduit en annexe). Ce classement s'appuie sur :

- des axes de symétrie
- des côtés parallèles
- des angles droits

Comme il s'agit d'une représentation schématisée, les formulations sont très épurées. Cependant elles s'accompagnent de schémas des quadrilatères qui permettent de voir leur évolution au fur et à mesure de l'imposition de nouvelles contraintes. La formulation utilisée ici s'appuie sur des dessins, comme pour les formulations du registre graphique mais aussi sur des mots qui complètent les dessins. La relation de subordination entre contraintes et conclusion est parfois représentée par une flèche entre les contraintes et le dessin du « nouveau » quadrilatère obtenu. Cette formulation nous semble intéressante car très synthétique, mais elle est très complexe (conclusion recyclée en contrainte) et contient beaucoup d'implicites.

Conclusion

Pour conclure, si l'on croise les informations de cette brève analyse des plans d'études et moyens d'enseignement avec l'étude du concept de propriété, on peut souligner que les propriétés sont présentes mais peu représentées comme telles. Dans le PER, la référence aux propriétés est explicite, mais les énoncés en sont absents, contrairement au plan d'études genevois de 2003 où elles étaient citées. Dans le livre du maître, l'apprentissage des propriétés est pointé du doigt comme étant essentiel pour pouvoir être réinvesti dans les démonstrations, cependant peu d'éléments relatifs à leur enseignement (formulations et situations) sont mis à disposition en dehors des exemples de procédures d'élèves. Enfin, le livre de l'élève fait peu référence aux propriétés de façon explicite bien qu'elles soient présentes (en ce qui concerne la partie sur les quadrilatères, point sur lequel nous avons focalisé notre étude) à travers des schémas et des tableaux. Les formulations qui n'utilisent que le registre discursif s'organisent dans des tableaux qui, il nous semble, masquent la relation de subordination entre contraintes et conclusion. Une autre formulation s'appuyant à la fois sur le registre discursif et le registre graphique donne un ensemble[9] avec des dessins complétés par des contraintes, les dessins ayant tour à tour le statut de contraintes puis de conclusion. Si on élargit l'analyse des ressources officielles des enseignants, les propriétés apparaissent finalement à la fin de l'aide-mémoire dans la rubrique « *Propriétés des transformations du plan* » (p.102) et dans la rubrique « *Figures semblables* » comme des remarques en formulation experte.

En ce qui concerne le livre et le fichier de l'élève, les propriétés n'y sont pas formulées, mais les exercices présentés font travailler les propriétés à travers des situations d'illustrations, de validation et d'énoncés-tiers.

La caractérisation du concept de propriété que nous avons faite nous permet d'identifier que c'est principalement leur formulation qui semble parfois complexe ou incomplète dans les ressources disponibles. Cependant les différentes situations proposées aux élèves sont variées, ce qui en fait le véritable atout sachant que la formulation des propriétés n'est qu'une étape dans le processus de compréhension du concept de propriété.

9 *En annexe.*

Références

Balacheff, N. (1982). Preuves et démonstrations en mathématiques au collège. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 3(3), 261-303.

Duval, R. & Egret, M. A. (1993). Introduction à la démonstration et apprentissage du raisonnement déductif. *Repères IREM*, 12, 114-140.

Coutat, S. (2005). Connaître et reconnaitre les théorèmes. *Petit x*, 67, 12-32.

Coutat, S. (2006). *Intégration de la géométrie dynamique pour favoriser la liaison école primiare-collège : Une ingénierie au collège pour la notion de propriété*. Thèse de l'université Joseph Fourier de Grenoble.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherche en Didactique des Mathématiques,* 10(2.3), 133-170.

Plans d'études

Conférence Intercantonale de l'Instruction Publique de la Suisse romande et du Tessin (CIIP), (2010-a). *Plan d'études Romand, 2e cycle, Mathématiques et Science de la nature. – Sciences humaines et sociale,* CIIP.

Conférence Intercantonale de l'Instruction Publique de la Suisse romande et du Tessin (CIIP), (2010-b). *Plan d'études Romand, 3e cycle, Mathématiques et Science de la nature. – Sciences humaines et sociale*, CIIP.

Curriculum de mathématiques du Cycle d'orientation. 1999-2003.

Manuels

Conférence Intercantonale de l'Instruction Publique de la Suisse romande et du Tessin (CIIP), (2011). *Mathématiaues 9-10-11, Aide-mémoire*, LEP.

Annexe :

Extrait de Mathématiques 9-10-11, Aide-mémoire