A propos des nombres décimaux (partie 1)[1]

André Scheibler

Introduction.

De quoi s'agit-il ?

Parler des nombres décimaux, c'est parler d'une écriture de nombres. Prenez les nombres entiers écrits en numération de position en base 10. Vous y ajoutez une virgule après le chiffre des unités, et le chiffre suivant indiquera le nombre de dixièmes de l'unité, le nombre suivant le nombre de dixièmes du dixième de l'unité, et ainsi de suite. Les enfants diront : « les nombres à virgule ! ». Nous pourrions dire aussi que les nombres décimaux dont il sera question ici sont les nombres rationnels écrits en écriture décimale, et dont la période est 0.

Pourquoi un article à propos des nombres décimaux ?

La description sommaire ci-dessus ne constitue pas, vous vous en doutez, une définition très rigoureuse. Cet article en présentera quelques-unes, ce qui devrait permettre d'éclairer quelques difficultés que l'on pourrait rencontrer dans l'usage ou l'enseignement de ces objets. Dans la vie courante et parmi toutes les écritures de nombres qui y apparaissent, les nombres décimaux occupent une place majoritaire. La plupart des situations de mesures de grandeurs vont utiliser des nombres décimaux. Il ne me paraît donc pas superflu de se pencher une fois de manière plus approfondie sur cet ensemble, de rechercher en quoi il se distingue d'autres ensembles de nombres.

A qui s'adresse cet article ?

Aux enseignantes et enseignants de mathématiques qui doivent enseigner les nombres et les calculs qui leurs sont associés, donc enseigner différentes écritures de nombres. Ils pourront alors comparer les définitions proposées ici avec celles décrites dans les moyens d'enseignement qu'ils utilisent, mais aussi avec les leurs propres. Les personnes chargées d'élaborer des moyens d'enseignement, les didacticiens, les mathématiciens pourraient également y trouver, je l'espère, un certain intérêt.

Contenu de l'article.

Quelques définitions des nombres décimaux, accompagnées de quelques commentaires, occuperont la plus grande partie de ce texte. S'y ajoutera une incursion dans le domaine du calcul, pour mettre en évidence quelques difficultés ou surprises que réservent une approche un peu plus approfondie de ces nombres.

Quelques définitions des nombres décimaux.

Simon Stevin (1548-1620).

La première définition des nombres décimaux en tant qu'objets mathématiques est attribuée à Simon Stevin qui publie, en 1585, un ouvrage écrit en flamand et intitulé « La Disme »[2]. Stevin, né à Bruges, a été employé de banque, ingénieur civil et militaire, précepteur de Maurice de Nassau, professeur de mathématiques à l'école d'ingénieurs de Leyde. Il eut une grande influence sur son temps, s'intéressant à de multiples domaines comme l'hydrostatique, la mécanique, l'astronomie, la navigation, la construction de digues, de moulins à vent, de fortifications.

Avant la parution de La Disme, les nombres rationnels utilisés dans la vie courante s'écrivaient la plupart du temps en juxtaposant à un nombre entier, généralement écrit en chiffres arabes, des rompus, c'est-à-dire des fractions de l'entier. Ces rompus étaient de toute nature, pas souvent des fractions décimales et variant selon le type de grandeur considéré. Mesurer la longueur d'une pièce de tissu, par exemple, pouvait se faire de manière fort différente de la mesure des dimensions d'un champ. Les règles de calcul, effrayantes avec de tels nombres, ont-elles incité Stevin, dont les multiples activités l'amenaient à les utiliser sans cesse, à produire un système plus général et beaucoup plus simple, nous n'en savons rien. Mais cela

1 *La deuxième partie de cet article paraîtra dans le prochain numéro de Math-Ecole.*

2 http://adcs.home.xs4all.nl/stevin/telconst/10sme.html

Primaire, Secondaire I et II

paraît bien vraisemblable à lire son introduction, dans laquelle il s'adresse à toutes sortes de corps de métiers[3], je le cite : « *astrologues, arpenteurs, mesureurs de tapisserie, gavieurs*[4]*, stéréométriens en général, et à tous les marchands* » pour leur vanter la simplicité de son système. Stevin présente les décimaux en deux parties : d'abord des définitions, puis les algorithmes d'opérations, addition, soustraction, multiplication, division, et leurs justifications.

Dans sa définition I, il baptise son système *Disme*, le situe comme « *permettant de gérer tous comptes se rencontrant aux affaires des hommes* » par usage unique de nombres entiers écrits en base 10, soit sans faire appel aux rompus.

Il définit ensuite une écriture de ses nombres, par usage extensif de « *la dixième progression* », en baptisant tout entier de commencement, dont le signe est (0) puis en définissant un signe pour chaque dixième : (1) pour le dixième d'un commencement, appelé prime, (2) pour le dixième d'un dixième de commencement, appelé seconde, et ainsi de suite. Ainsi :

8(0)9(1)3(2)7(3)

désigne 8 commencement, 9 prime, 3 seconde et 7 tierce, soit ensemble :

8+9/10+3/100+7/1000

Nous dirions aujourd'hui 8 entiers 9 dixièmes 3 centièmes et 7 millièmes, que nous écrivons 8,937. L'écriture utilisée par Stevin est donc une écriture polynomiale, que nous pourrions traduire par :

$$8.10^{0}+9.10^{-1}+3.10^{-2}+7.10^{-3}$$

notation finalement très proche des rompus dont veut se défaire Stevin, mais faite exclusivement de dixièmes parties. Il prend soin de préciser :

- aucun nombre ne peut dépasser 9, sauf le commencement ;
- si un signe est « défaillant » (par exemple pas de tierce), il faudra noter 0 tierce, soit 0(3) dans l'écriture du nombre.

Toutes les démonstrations qu'il fera ensuite pour justifier les algorithmes qu'il propose seront basées sur la comparaison de ces deux écritures (rompus et Disme). Preuve est également faite, du même coup, que toutes les opérations sur des nombres de Disme se ramènent à traiter des nombres entiers, et à traiter ensuite le signe du dernier chiffre. Les démonstrations sont conduites sur un exemple, à charge au lecteur d'en saisir la généralité. Ainsi :

2/10 et 3/100 multipliés font 6/100,

donc 2(1) multiplié par 3(2) fait 6(3), (3) est obtenu par (1) + (2).

L'objet « *nombre décimal* », chez Stevin, est donc essentiellement à chercher dans l'écriture polynomiale qu'il définit :

8(0)9(1)3(2)7(3)

s'écrit en effet aujourd'hui :

$$8.10^{0}+9.10^{-1}+3.10^{-2}+7.10^{-3}$$

Il est alors facile de calculer avec de telles écritures, et c'est bien l'objectif visé. Stevin peut alors proposer à toutes sortes de corps de métier de l'époque, comme il le dit dans son introduction, des méthodes de calcul simples et rapides.

Implicitement, Stevin procède donc par extension des nombres entiers, chaque nombre de Disme étant en fait déterminé par un couple d'entiers, le premier formé de tous les chiffres utilisés, dans l'ordre, sans omettre de zéro en cas de défaillance d'un signe, le second étant le signe du dernier chiffre.

8(0)9(1)3(2)7(3)

est traité comme le couple (8937 ; 3)[5].

Mais Stevin ne l'explicite jamais de cette manière.

Ses nombres de Disme sont-ils plongés dans un ensemble plus grand ? Stevin nous donne quelques indications à ce sujet en considérant la division 4(1) divisé par 3(2) :

> *« Alors le quotient ne pourra s'expliquer par nombres entiers, il apparaît qu'il y en sortira infiniment des trois, restant toujours un tiers. En tel accident, l'on peut approcher si près, comme la chose le requiert, omettant le résidu. Il est bien vrai que*
>
> *13(0)3(1)3.1/3(2), ou 13(0)3(1)3(2)3.1/3(3), etc.*

3 *Sur les mathématiques de l'ingénieur à l'époque, voir l'article de C. Goldstein (2012).*

4 *Mesureurs de capacité, en particulier pour le vin*

5 *Soit 8937 millièmes.*

> *ferait le parfait requis, mais notre intention est d'opérer en cette Disme, par nombres tous entiers, car nous voyons à ce qui s'observe aux négoces des hommes, là où on ne fait point compte de la millième partie d'une maille, d'un grain, etc., [...] cette imperfection est plus utile que telle perfection. »*

Stevin laisse donc cette « *perfection* » à d'autres, en imposant de « *n'opérer que par nombres tous entiers* ». Il est donc parfaitement conscient qu'un ensemble de nombres plus grand, dont « *les parfaits requis* », contient la Disme. Mais il en définit bien les contours, en précisant d'opérer que par nombres tous entiers. Cette Disme se dirait donc aujourd'hui ensemble des nombres décimaux limités, ensemble désigné par ID, et sur lequel nous reviendrons plus loin.

Henri Lebesgue (1875-1941).

Une description des nombres est proposée par Henri Lebesgue dans un livre qu'il écrit au début du 20e siècle : « *Sur la mesure des grandeurs* ». Dans son introduction, il précise s'adresser à de futurs professeurs de l'enseignement secondaire, son propos sera donc :

> *« pédagogique, si j'ose employer ce qualificatif qui suffit ordinairement pour faire fuir les mathématiciens ».*

Cette boutade est-elle encore aujourd'hui d'actualité ? Il va préciser d'emblée que la mesure des grandeurs est le point de départ de toutes les applications des mathématiques, « *cette mesure fournissant le nombre, c'est-à-dire l'objet même de l'Analyse* ». Il insiste sur la nécessité non pas de définir un objet, trop souvent chargé de métaphysique, mais plutôt de ce que l'on en fait. Son approche est donc expérimentale, assurant ainsi un sens aigu de la réalité, à éveiller chez les jeunes, « *après, mais après seulement, le passage à l'abstrait peut être profitable* ». Il considère donc « *l'Arithmétique comme une science expérimentale au même titre qu'une autre* », et cette Arithmétique s'est édifiée « *parce que nous disposons d'une définition complète du nombre : la description de l'opération qui le fournit* ». Il passera donc, dans sa construction, directement du nombre entier écrit en numération décimale, « *car nous avons la chance unique d'avoir à notre disposition une langue universelle, la numération décimale écrite* », au nombre le plus général. Je reproduis ci-dessous la phase fondamentale de cette construction.

> *« Dans cet exposé, après avoir indiqué des besoins qui ont pu conduire les hommes à comparer des distances, à définir les mots distances égales ou inégales, je décrirai le procédé de comparaison : soit à comparer AB et le segment U, appelé l'unité.*
>
> *Portons U sur la demi-droite AB, à partir de A en Aa, puis à la suite en ab, etc. Et soit A1 la dernière extrémité ainsi atteinte avant de dépasser B. Si on a atteint A en portant 3 fois U on dira que la longueur de AB (sous-entendu avec l'unité U) est 3 si A1 est en B; dans le cas contraire, on dira que la longueur de AB est supérieure à 3 et inférieure à 4. Exprimant par-là que B est toujours l'un des points du segment A1B1 d'origine A1 et égal à U, mais n'est jamais le point B1.*
>
> *Divisons U en 10 parties égales; c'est-à-dire prenons un segment U1 avec lequel la mesure de U soit 10 et recommençons les opérations; nous arriverons à un segment A2B2 contenu dans A1B1 et la longueur de AA2 avec l'unité U1 sera comprise entre 30 et 39; soit, par exemple, 37. La longueur de AB avec l'unité U1 sera dite au moins égale à 37 et inférieure à 38.*
>
> *En passant de même de U1 à un segment U2, on arrivera par exemple à 376 et 377; puis à 3760 et 3761; puis à 37602 et 37603, etc. »*

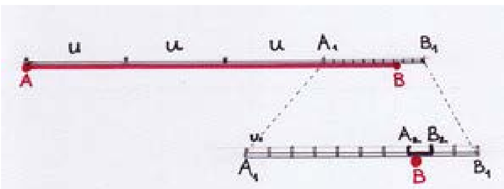

Figure 1

Il s'agit maintenant d'examiner un symbole, qu'on appellera *nombre et qui, étant le* ***compte rendu complet de cette suite indéfinie d'opérations****, en pourra être dit le* *résultat*. On y arrive très facilement, par les remarques suivantes : A chaque stade de la mesure, on obtient deux entiers, 37 et 38, ou 37602 et 37603, qui diffèrent exactement d'une unité; donc il suffit de connaître la suite des entiers inférieurs obtenus à chaque stade.

Or cette suite, 3, 37, 376, 3760, 37602, ... est telle que chaque nombre est obtenu en écrivant un chiffre à la droite du nombre précédent. Dès lors la connaissance d'un des nombres de la suite fournit tous ceux qui le précèdent. Si, du moins, on sait à quel stade le nombre connu a été obtenu [...].

On aboutirait ainsi à la notation ordinaire des nombres. Dans cette notation, les zéros placés à la gauche de l'entier obtenu au premier stade (lequel peut être zéro) n'ont aucune importance ; par analogie, lorsqu'il arrive que tous les chiffres de droite sont des zéros à partir de l'un d'eux, on convient volontiers de les omettre en conservant toutefois ceux de ces zéros qui seraient avant la virgule. Lebesgue dit alors qu'il s'agit d'un nombre décimal exact. Actuellement, l'appellation est simplement nombre décimal

On peut donc considérer les nombres ainsi construits par Lebesgue comme des nombres décimaux illimités, et ceux qui se terminent par une suite infinie de zéros sont les nombres décimaux exacts, ou limités.

La construction de Lebesgue permet donc de passer directement du nombre entier au nombre le plus général, qu'il soit décimal exact, rationnel ou même irrationnel. En effet, la comparaison qu'il propose entre un segment AB et une unité U est valable pour tout segment AB, il pourrait tout à fait être la diagonale d'un carré par exemple. Mais en mathématicien sérieux, encore doit-il s'assurer qu'inversement, toute suite de chiffres indéfinie vers la droite (ce qui veut dire qu'elle peut être infinie mais que l'on sait l'écrire aussi loin que l'on veut), et comportant une virgule, est la mesure d'un segment. Reprenons le texte de Lebesgue :

« Si, connaissant cette suite, on cherche à construire AB à partir de A sur une demi-droite AX, on obtient de suite les segments A1B1, A2B2, ... emboîtés les uns dans les autres.

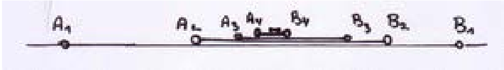

Figure 2

Des axiomes de la géométrie, il résulte qu'il existe un point B commun à tous ces segments selon l'axiome de continuité, et qu'il n'y en a qu'un seul selon l'axiome d'Archimède. On a donc un segment AB bien déterminé, mais la longueur de AB ne sera la suite de chiffres d'où on est parti que si B ne coïncide avec aucun des points Bi. On voit immédiatement que ce cas se présente si, et seulement si, tous les chiffres de la suite sont des 9 à partir d'un certain rang. De telles suites sont donc à exclure, toutes les autres sont des nombres. »

Expliquons cela. On l'a vu au début, les points Ai sont toujours la dernière extrémité avant le point B, ou à la limite confondus avec B, AiB est donc toujours plus petit que Ui, ou nul, et Bi est ainsi toujours strictement à la droite de B, et ne peut jamais être confondu avec lui. Mais si la suite de nombres est formée d'une infinité de 9, tous les segments emboîtés auront comme point commun unique le point Bi, qui pourtant ne peut pas être B. Il y aurait contradiction avec la construction proposée par Lebesgue. Ce dernier élimine donc sans état d'âme un tel nombre comme pouvant appartenir à son ensemble. Nous reviendrons plus loin sur ce cas un peu étrange, et qui nous fait sentir tout le soin qu'il est nécessaire de prendre lorsque l'on s'approche de quantités infiniment petites ou infiniment grandes. Ces difficultés ne seront en fait vaincues que vers la moitié du 19e siècle.

Le nombre chez Lebesgue n'est donc pas prioritairement une écriture, comme chez Stevin, mais une sorte de protocole expérimental de mesure de toute grandeur. Soucieux d'une rigueur axiomatique, il fait appel à l'axiome de continuité et à l'axiome d'Archimède, sur lesquels nous reviendrons peut-être dans un prochain article, et règle de manière drastique le cas d'un périodique de période 9,comme le fameux 0,999..... D'autre part, il réglera la question de la mesure de deux segments isométriques distincts par la graduation de la droite numérique, en utilisant les déplacements laissant fixes cette droite : symétrie centrale autour d'un point de la droite et translation par un vecteur porté par la droite.

Il lui reste à définir l'opération d'addition : connaissant la longueur de deux segments, comment trouver celle du segment somme, et l'opération de multiplication. Pour cette dernière, il est intéressant d'observer la situation proposée par Lebesgue pour son traitement:

> *« On connaît la longueur, soit par exemple 37,425... d'un segment AB avec l'unité U, et la longueur de U par rapport à une unité V, soit 4,632..., quelle est la longueur de AB avec l'unité V ? »*

Lebesgue rappelle en note que

> *« la multiplication des entiers est supposée avoir été définie en termes analogues [...]; toute question qui conduit à une multiplication est un problème de changement d'unité, ou d'objet: 5 sacs de 300 pommes; 2m.75 d'étoffe à 28fr.45 le mètre ».*

Il n'utilise donc pas la situation classique faisant intervenir une disposition d'objets selon un réseau rectangulaire ou celle de la détermination de l'aire d'un rectangle, notion qu'il traite dans un autre chapitre.

Nous laissons le lecteur apprécier cette approche de la multiplication proposée par Lebesgue, alors que nous sommes plutôt fort habitués à l'enseigner par le biais de la détermination de l'aire d'un rectangle.

Soulignons enfin l'association essentielle que fait Lebesgue entre géométrie, des segments sur une droite, et l'écriture de ses nombres traduisant un protocole de mesure de ces segments.

Références

Brousseau G. (1998). *Théorie des situations didactiques,* La pensée sauvage, Grenoble.

Goldstein C. (2012). Les fractions décimales : un art d'ingénieur ? HAL : hal-00734932, version 1 cf http://hal.archives-ouvertes.fr/index.php?halsid=dhb78dii8ggjg8u43uq2lqhn23&view_this_doc=hal-00734932&version=1

Lebesgue H-L. (1915). *Sur la mesure des grandeurs,* A. Kundig, Genève.

Le Lionnais F. et al.(1979). *Dictionnaire des mathématiques,* PUF, Paris.

Stevin S. (1585). *La Disme,* http://adcs.home.xs4all.nl/stevin/telconst/10sme.html

Aide mémoire 9-10-11 (2011). *Moyen d'enseignement romand.*