Quelle initiation à la géométrie déductive ? Quelques propositions issues de la recherche en didactique des mathématiques

Ruhal Floris

Université de Genève

Introduction

Dans le Plan d'études romand, à propos de la géométrie, on trouve dans la colonne « indications pédagogiques » le texte suivant :

> *Au cycle 3, les élèves doivent instaurer un autre rapport aux représentations graphiques en géométrie en les considérants comme des représentations d'un objet idéal (figure). Cette représentation étant très prégnante, elle suffit à beaucoup d'élèves comme preuve (« je vois donc je crois ») alors qu'à ce stade de la scolarité, il faut privilégier une approche basée sur les propriétés des figures. Pour favoriser ce passage du perceptif aux propriétés des objets géométriques, il est bon de permettre aux élèves de faire la distinction entre « figure », « dessin », « croquis ».*

Cette remarque pose assez précisément le problème. Malheureusement, on ne peut pas dire que la dernière phrase fournisse des éléments opérationnels. Le plan d'études lui-même est également assez vague, on y lit :

> *« Reconnaissance, dénomination, description de figures planes selon leurs propriétés ».*

Ainsi donc, comme pour d'autres sujets, la responsabilité de l'enseignant est engagée. Souhaitons que cette revue de propositions et d'analyses l'aide un peu dans ses choix[1].

La question de la transition du dessin à la figure[2], et plus généralement celle de l'instauration d'une géométrie hypothetico-déductive a fait l'objet de très nombreuses recherches. Dans cet article nous nous proposons de présenter certaines d'entre elles, que nous estimons significatives. Nous présentons également la façon dont certains enseignants en formation initiale ont abordé la question en utilisant des logiciels de géométrie dynamique à travers un récit d'épisode de formation.

Propositions dans le cadre de la théorie des situations

Dans leurs travaux, Berthelot et Salin (1992, 2005) se réfèrent à la Théorie des situations didactiques (TSD, Brousseau, 1998) afin de développer des propositions de problèmes basés sur des principes adidactiques, c'est à dire favorisant l'autonomie et la prise de responsabilité de l'élève par rapport à la connaissance. Ils postulent que l'entrée dans une géométrie de figures peut être facilitée par une problématique de modélisation. L'idée principale est de proposer des problèmes définis en dehors de la feuille de papier, comme dans le préau par exemple, dont la résolution nécessite l'élaboration d'un croquis voire d'un plan sur la feuille de papier.

Voici un exemple avec la situation des drapeaux (Berthelot et Salin, 2005, p.125, reprise de Brousseau G. et N., 1987). Il s'agit de mesurer la distance entre deux drapeaux plantés au bord d'un terrain non accessible (pelouse, étang). Le croquis ci-dessous illustre des solutions réalisables en restant dans l'espace réel et en y effectuant des mesures. Selon les connaissances géométriques à disposition, d'autres solutions sont possibles autant dans la réalité qu'en traçant un plan sur papier.

1 *Dans cet article nous n'avons pas la prétention d'être exhaustifs et présentons simplement des éléments qui nous paraissent intéressants et invitent le lecteur à des approfondissements, que de nombreuses références en ligne devraient favoriser. Pour des revues plus complètes, voir Perrin-Glorian et al. (2013) ainsi que Perrin-Glorian & Salin (2009).*

2 *La figure géométrique est un objet qui se réfère à une théorie (la géométrie euclidienne par exemple) alors que le dessin est une trace matérielle présente sur la feuille de papier ou sur l'écran de l'ordinateur (Laborde C., Capponi B. ,1994).*

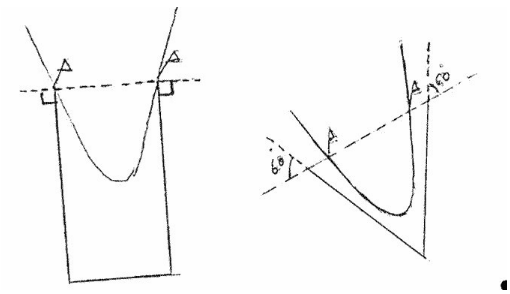

Fig.1 et 2 Situation des drapeaux (d'après Berthelot et Salin, 1992, 2005)

Cette situation a été adaptée[3] pour être proposée à des instituteurs en formation.

Un autre exemple, toujours en référence à la TSD, développé par Brousseau (1987), propose une situation d'entrée adidactique dans la géométrie déductive, basée sur un défi impossible, celui d'agrandir le triangle que l'on obtient en dessinant trois médiatrices d'un triangle très obtus (au lieu du point unique théorique). La particularité de cette situation est qu'elle est fondée sur une macro rupture de contrat didactique, puisque l'enseignant laisse croire que l'intersection des médiatrices d'un triangle n'est pas un point. Si dans d'autres situations il y a aussi souvent ruptures de contrat, celles-ci sont en quelque sorte internes à la situation, par rapport aux stratégies de base attendues des élèves, comme dans l'exemple de l'agrandissement du puzzle[4] où le choix judicieux des variables numériques permettra de disqualifier certaines procédures d'élèves (Brousseau, 1998 p. 237). Mais dans le cas considéré, il s'agit d'autre chose que de changer de stratégie, il s'agit de faire opérer une modification du rapport des élèves aux déclarations sur les objets géométriques. Rappelons que ce rapport est, à la fin de l'école primaire, de type « je vois, donc… » (Berthelot et Salin, 1992 ; Chevallard et Jullien, 1990). Il ne semble pas évoluer vers « je sais donc… » pour des adultes n'ayant pas été initiés de façon constante et approfondie à une culture géométrique euclidienne. Nous avions proposé ce défi impossible (ci-dessus) à des élèves de 15-16 ans du Collège de Genève[5] car nous nous étions rendus compte que nombre d'entre eux rencontraient encore des difficultés pour entrer dans la géométrie théorique[6], souvent peu travaillée à l'école secondaire inférieure à Genève. Ces mêmes difficultés étaient présentes chez de futurs instituteurs ou d'enseignants non mathématiciens lors de formations continues.

On trouvera dans Floris (1996) une description et une analyse de cette situation et de son expérimentation. Dans cette même perspective de problématisation de l'entrée dans la géométrie euclidienne, on trouve le problème du triangle aplati, qui a donné lieu à de nombreux articles (Berté, 1996 ; Floris, 1995).

Bien entendu, il n'est pas question d'imaginer que des situations isolées soient suffisantes pour permettre une évolution durable vers un rapport théorique à la géométrie étant donné la nature profondément culturelle et sociale du concept de démonstration (Arsac,1987). Plusieurs chercheurs ont proposé des cadres théoriques permettant d'analyser différents rapports au savoir possibles dans les activités géométriques.

Differents types de rapports à la geometrie : analyses et propositions

La réflexion de Noirfalise (1993) conduit à mettre en évidence, en analysant des manuels du collège (français, cette fois, donc de l'école secondaire obligatoire) que l'élève peut satisfaire au contrat déterminé par une grande partie des exercices de géométrie en tenant deux positions distinctes : l'une empirique dans laquelle l'élève associe les propriétés des figures aux constructions qu'il effectue et l'autre rationnelle, plus idoine à ce qui sera attendu en termes de démonstration, dans laquelle les propriétés peuvent être déduites les unes des autres. Ces deux positions s'accompagnent de gestes[7] non antagonistes[8], ce

3 *Dans un hall, avec utilisation de cônes routiers et de ficelles. Voir aussi une variante dans Perrin-Glorian & Salin (2009), p. 66.*

4 *Activité FA14 dans le livre de l'élève de 9è, Mathématiques 9-10-11, LEP et CDIP, 2011.*

5 *Nom des gymnases genevois.*

6 *Hypothetico-déductive.*

7 *Activité de l'élève au sens large.*

8 *Plus précisément la même propriété peut être induite*

	Géométries non axiomatiques		Géométries axiomatiques	
type de géométrie	concrète (G0)*	axiomatique (G1)	proto-axiomatique (G2)	axiomatique (G3)
objets	physiques		théoriques	
validations	perceptivo-déductive		hypothético-déductives	

*A proprement parler G0 n'est pas une géométrie.

Tableau Parzysy

qui explique la persistance de la première position.

Dans cette perspective, un enseignement fondé sur une explicitation d'un contrat de type hypothético-déductif a été expérimenté avec succès (selon Noirfalise, 1993 ; voir aussi Maze, 1992)[9].

Parzysz (2007), définit quatre paradigmes (cf. tableau) et montre que dans certains problèmes, trois d'entre eux peuvent coexister et générer une ambiguïté forte (l'évidence de la figure pose confusion), selon les gestes de l'élève (dans l'article il s'agit d'enseignants de l'école élémentaire en formation). Il y analyse la dialectique de ce qu'il appelle le *su* et le *perçu* ; autrement dit la dialectique entre le « je vois donc je crois » et « je sais donc je vois ». Il propose ainsi de se baser sur ce type de problèmes pour provoquer un débat que la médiation de l'enseignant peut porter à un niveau théorique (G2)[10].

L'exploitation de la géométrie dynamique

Le logiciel Cabri-géomètre a été conçu il y a plus de vingt ans dans le but de favoriser l'apprentissage de la géométrie. Depuis, d'autres logiciels de géométrie dynamique ont été développés, tel GeoGebra, actuellement souvent utilisé par les enseignants. Ces environnements ont donné lieu à de nombreuses recherches, qui ont mis en évidence leurs potentialités ainsi que certaines difficultés. Pour Capponi (2000) :

> *« Le passage du dessin à la figure est favorisé dans un tel environnement puisque l'élève doit produire une procédure plutôt qu'un dessin. L'élève qui construit agit ainsi sur la figure avec les outils du logiciel et l'enseignant peut profiter de cette production de procédure pour demander à l'élève d'en faire une description sous la forme d'un texte. Cette explicitation constitue une phase importante du travail de la géométrie de traitement au collège. De surcroît, le déplacement de la figure et la conservation des propriétés constituent un moyen puissant pour la validation et la production de conjectures. […] Mais la question reste posée de savoir si cette géométrie expérimentale, dans un environnement logiciel, est intéressante et/ou utile pour conduire les élèves vers des démarches de preuves et de démonstration. » (p.39-40)*

Et si les recherches fournissent des réponses plutôt positives, elles montrent surtout le rôle important de l'enseignant dans un tel processus. Les articles (en ligne) de Capponi (op. cit.) et de Soury-Lavergne (2011) avec leur bibliographie fournissent des exemples et des développements très riches.

Plutôt que de développer ces recherches, nous avons choisi de présenter un épisode de formation qui peut servir de piste pour l'enseignant de 9ème année (12 ans) chargé d'enseigner aux élèves à « élaborer des cheminements déductifs » selon le Plan d'études romand.

Ce dernier prévoit, pour ce degré scolaire, l'étude des droites particulières du triangle (médiatrices et bissectrices en particulier). Devant mettre en place une séquence d'enseignement intégrant l'utilisation de

à partir d'une construction ou en appliquant un théorème ou un axiome.

9 *En proposant explicitement aux élèves un jeu de déduction de propriétés.*

10 *A noter dans une perspective similaire, les travaux de Houdement & Kuzniak (2000, 2006).*

logiciels informatiques, plusieurs stagiaires de l'institut de formation des enseignants de Genève ont choisi ce thème[11]. L'étude de la médiatrice leur fournit un sujet intéressant pour travailler la géométrie déductive, puisqu'il y a deux possibilités de la définir : d'une part comme droite perpendiculaire à un segment passant par le milieu de ce segment et d'autre part comme lieu de points équidistants de deux points donnés. Parzysz (2007) décrit une expérimentation dans laquelle il met en évidence le caractère algorithmique, non théorisé, des traitements d'exercices portant sur la justification de l'égalité entre les deux objets par une partie des instituteurs en formation.

Voici un exemple d'interactions possibles offertes par GeoGebra, observées par un stagiaire lors d'une séquence et après avoir travaillé sur la définition de la médiatrice comme lieu de points[12] :

> *« Pour montrer l'identité de la médiatrice comme lieu géométrique d'une part et comme droite coupant le segment en son milieu et perpendiculaire à ce segment d'autre part, nous avons fait tracer les élèves sur GeoGebra dans l'ordre suivant : d'abord la commande « médiatrice » puis la construction de la perpendiculaire. Or la conclusion qu'on attendait des élèves, à savoir l'identité des deux droites construites n'est pas venue spontanément dans bien des cas. Selon nous, la raison principale vient du fait qu'après avoir fait tracer la médiatrice du segment [AB] avec l'outil « Médiatrice » de Geogebra, si l'on demande au logiciel de tracer la perpendiculaire à [AB] passant par son milieu, GeoGebra fait apparaître directement la droite en épaississant la médiatrice. La plupart des élèves ont eu du mal à aboutir seuls à la conclusion recherchée : il faut avoir imaginé que ces 2 droites puissent être différentes pour que leur superposition devienne remarquable.*
>
> *Il se trouve qu'il y avait dans ce cas une solution à ce problème : inverser l'ordre de construction. En effet, si on construit d'abord la perpendiculaire à [AB] qui passe par son milieu puis la médiatrice (avec la commande « Médiatrice »), cela change tout. Lorsqu'on utilise l'outil « Médiatrice », une fois le point A cliqué, lorsque l'on déplace la souris, GeoGebra affiche en permanence la médiatrice entre A et le pointeur de la souris. Ainsi lorsque ce pointeur se rapproche de B, on voit clairement deux droites différentes qui se rapprochent l'une de l'autre jusqu'à se confondre. On a donc les deux alternatives sous nos yeux : deux droites différentes puis deux droites identiques. Dans la première procédure, on ne voyait pas ces deux alternatives, ainsi on ne comprenait pas ce qu'il pouvait y avoir de remarquable à ce que les deux droites soient superposées puisqu'on n'avait pas à l'esprit qu'elles puissent être différentes (et qu'il n'y a aucune raison qu'elles le soient a priori) ».*

Cette observation n'est pas sans rappeler les situations citées précédemment comme celle du triangle aplati ou du triangle le plus grand possible obtenu en traçant les médiatrices des côtés d'un triangle obtus. Elle fournit des pistes pour développer un enseignement travaillant la relation entre les deux définitions afin d'introduire à cette occasion des éléments de géométrie G2 (proto-axiomatique)[13].

Conclusion

La question de l'entrée dans la géométrie déductive est complexe et les recherches survolées ici mettent ceci en évidence, tout en proposant des éléments de réflexion et des pistes pour l'enseignement. A cela s'ajoute l'idée qu'il s'agit d'un thème difficile, et non prioritaire dans les filières ne préparant pas aux études gymnasiales[14]. Nous pensons cependant que ce serait renier l'un des objectifs culturels de l'enseignement des mathématiques que de re-

11 Le Plan d'études romand prévoit explicitement l'utilisation de logiciels de géométrie dynamique.

12 Observation d'une activité MITIC (TICE) par J.-D. Picon, enseignant au secondaire.

13 La géométrie dynamique peut être aussi exploitée pour travailler la définition de la médiatrice par l'équidistance.

14 « élaboration de cheminements déductifs basés sur des figures géométriques » n'est pas une attente fondamentale pour les niveaux 1 et 2 du Plan d'études romand, même si cela fait partie des objectifs pour tous les niveaux.

noncer complètement à des éléments de géométrie déductive. La problématique de modélisation ou l'utilisation judicieuse de la géométrie dynamique peut contribuer à intéresser des élèves des niveaux non gymnasiaux. Pour cela, une perspective consisterait à sortir de la classe : soit direction le préau, soit direction l'atelier informatique.

Références[15]

Arsac, G. (1987). L'origine de la démonstration. *Recherches en didactique des mathématiques,* 8(6), 267-312.

Berté, A. (1996-1997). Progressions et problématiques en géométrie à partir d'un exemple : l'inégalité triangulaire. *Petit x* 45, 41-53. [Page Web]. Accès : http://www-irem.ujf-grenoble.fr/revues/revue_x/fic/45/45x4.pdf

Berthelot, R. & Salin, M. H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire.* Thèse. LADIST, Université de Bordeaux 1. [Page Web]. Accès : http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00414065

Berthelot, R. & Salin, M. H. (2005). Vers une problématique de modélisation dans l'enseignement élémentaire de la géométrie In M.H. Salin, P. Clanché & B. Sarrazy (eds.), *Sur la théorie des situations didactiques. Questions, réponses, ouvertures. Hommage à Guy Brousseau. (pp.125-142).* La Pensée Sauvage : Grenoble.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques.* La Pensée Sauvage : Grenoble.

Brousseau, G. & Brousseau, N. (1987). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire,* IREM de Bordeaux. [Page Web]. Accès : https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00610769/fr/

Brousseau, G. (1987). Didactique des mathématiques et questions d'enseignement : proposition pour la géométrie. *Les sciences de l'éducation*, 1-2, 86-100.

Capponi, B. (2000). De la géométrie de traitement aux constructions dans Cabri-géomètre II au Collège. *Repères-Irem*, 40, 11-42.

Chevallard, Y. & Jullien, M. (1990-91). Autour de l'enseignement de la géométrie au collège -première partie. *Petit x*, 27, 41-76.

Floris, R. (1995). La géométrie traite-t-elle des illusions d'optique ? Quatre élèves aux prises avec le triangle aplati. *Petit x*, 39, 29-53. [Page Web]. Accès : http://www.irem.ujf-grenoble.fr/revues/revue_x/fic/39/39x3.pdf

Floris, R. (1996). Quelles situations fondamentales pour l'apprentissage de la géométrie ? *Revue des Sciences de l'Education*, XXII-2, 365-389.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (2000). Formation des maîtres et paradigmes géométriques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 20(1), 89-116.

Laborde C. & Capponi B. (1994). Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(1,2),165-210.

Maze, M. (1992). Initiation à la démonstration en classe de sixième. *Bulletin de liaison IREM de Clermont.*

Noirfalise, R. (1993). Contribution à l'étude didactique de la démonstration. *Recherches en didactique des mathématiques*, 13(3), 229-256.

Parzysz, B. (2007). La géométrie dans l'enseignement secondaire et en formation de professeurs des écoles : de quoi s'agit-il ? *Quaderni di ricerca in Didattica* 17, 121-144. [Page Web]. Accès : http://math.unipa.it/~grim/quad17_BParzysz_07.pdf

Perrin-Glorian, M.-J. & Salin, M.-H. (2009). Didactique de la géométrie. Peut-on commencer à faire le point ? In L. Coulange & C. Hache (eds.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques. (pp.47-82).* Paris 7 ARDM & IREM, [Page Web]. Accès : http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/up/actes_seminaire_national_de_didactique/Actes%20du%20S%C3%A9minaire%20National%20de%20Didactique%202009.pdf

Soury-Lavergne, S. (2011). De l'intérêt des constructions molles en géométrie dynamique, *revue en ligne MathemaTICE*, Sesamath [Page Web]. Accès : http://revue.sesamath.net/spip.php?article364

15 Toutes les références Internet consultées mi-octobre 2014.