1/9801 ; Évolution du milieu d'une division un peu particulière (partie 3)

Christine Del Notaro

Université de Genève

Préambule

Cette troisième et dernière partie vient clore mon propos, initié voici près d'un an. Après avoir présenté mon investigation du milieu de cette division particulière et celle d'étudiants en formation à l'enseignement primaire (Math-Ecole 220), j'ai fait ressortir le jeu des étudiants avec lesquels je m'étais mise en interaction de connaissances, d'une part, et le jeu des élèves, mettant ainsi en évidence la distinction chiffre/nombre (Math-Ecole 221). Il me reste donc à exposer la dernière facette de cette recherche, à savoir, le lien entre les deux partenaires élèves et étudiants. C'est à travers la mise sur pied d'un dispositif interactif que ce lien a été fait. Il consiste en un échange de narrations à distance (j'en fus la messagère) à propos du savoir investigué, de questions sur les procédures, etc. Je précise à nouveau que pour faire en sorte de maintenir l'interaction vive, il a fallu aménager un milieu donnant l'opportunité aux étudiants et aux élèves de procéder à des explorations du milieu mathématique de manière interactive et de laisser, en outre, un espace à la production de narrations. La narration est à envisager comme mode de restitution d'une pensée impliquant strictement le contenu mathématique de l'événement didactique, partagé, en l'occurrence, par des élèves et des étudiants.

Interactions entre élèves et étudiants

L'intérêt de ce dispositif réside d'une part, dans l'étonnement provoqué chez les protagonistes, et d'autre part, dans le traitement *in vivo* qu'ils vont en faire. Dans l'échange avec autrui, que l'on soit élève ou étudiant, on va répondre « quelque chose », qui est à considérer selon moi, comme le reflet d'une expression mathématique. Ce qui m'intéresse particulièrement est de cueillir au vol ces manifestations non anticipées, remontant d'un niveau que j'ai appelé « *présumé* » dans ma thèse de doctorat (Del Notaro, 2010). C'est dans ce niveau que s'exprime ce que l'élève convoque comme anciennes connaissances et qu'il met dans le milieu pour traiter le fait numérique, en l'occurrence, la division particulière. En d'autres termes, il s'agit de toutes les connaissances activées observables qui émergent d'un degré infra conscient, d'où les connaissances surgissent sans avoir été anticipées ; ce niveau de connaissances *présumé* fait apparaitre l'existence d'une certaine confusion chez l'élève, dans la mesure où, à partir de ce qu'il projette dans la tâche, il va en premier lieu tenter d'inférer une logique pour lui permettre de continuer. Il est courant que les informations affluent en surnombre et de manière désordonnée, produisant une désorganisation temporaire. C'est ce que l'on pourrait appeler le niveau de l'expérience qui se manifeste de cette manière chaotique : *tout remonte en bloc*, pourrait-on dire, et l'élève doit pouvoir y mettre de l'ordre. Ce n'est qu'à l'issue de cette mise en ordre que les connaissances peuvent éventuellement se convertir en savoirs, ce qui constitue un processus très long. Pour en revenir à l'interaction entre les deux parties, le moteur en est à la fois la surprise des étudiants envers les récits des élèves et, du point de vue des élèves, l'impatience de découvrir la réponse des étudiants. A chacun de mes passages en classe, au terme de la séance dans laquelle j'interagis avec les élèves, je tente de faire exister les étudiants auprès des élèves en leur demandant d'écrire une narration à leur intention. A l'autre bout de la chaine, dans la dernière partie de l'heure de cours universitaire, je restitue ce qui a été fait en classe, narrant oralement les événements. Je remets les procédures des élèves aux étudiants et leur demande de produire une réponse.

Le dispositif peut être considéré comme fructueux à divers titres : s'il a permis aux élèves d'entrer dans une démarche de recherche et dans un processus inductif/déductif, les étudiants quant à eux, ont pu approcher différemment la question du savoir et des connaissances et se poser des questions nouvelles. J'y reviendrai. L'un des écueils à éviter est de faire basculer ce dispositif du jeu de tâches en technique d'enseignement (Del Notaro, 2014b), dans la mesure où ce qui le sous-tend est l'interaction de connaissances.

Calendrier

Pour donner une idée des imbrications entre mon travail en classe avec les élèves, puis en cours avec les étudiants, voici les tâches prévues pour les 100 étudiants (4 groupes de 25 env.), pour une semaine :

<u>Avril 2013</u>

Lundi 15 en cours

Groupes A

2 groupes de 5-6 étudiants

Distribuer mes notes

- Se regrouper par 4-5
- Compléter, poursuivre la recherche
- Ecrire un compte-rendu de groupes de ce qu'ils auront fait.

2 autres groupes de 5-6 étudiants

Distribuer productions du groupe de Dominik

- Ecrire un compte-rendu de ce que les élèves ont produit, selon eux.

Groupes B

- Se regrouper par 4-5
- Prendre connaissance des suggestions des élèves
- Effectuer ce que prévoient les élèves
- Poursuivre selon ce que cela leur évoque

Produire un compte-rendu de leur travail

Figure 1: Extrait du calendrier

Un exemple d'interaction

L'extrait de calendrier ci-avant permet de situer cet échange entre élèves du groupe B3 et étudiants ; voici ce qui était prévu :

- B1 & B2 : prendre connaissance de la réponse des élèves et poursuivre la recherche (notez chaque étape)
- <u>B3 : prendre connaissance de la réponse de Max et lui répondre</u>
- B4 : décrire le cheminement de la pensée des élèves et écrire ce que cela évoque pour vous (surprise, questions, etc.)

L'exemple de quelques échanges du groupe B3, figure 2, est suivi de sa retranscription, pour plus de clarté. L'intérêt de faire figurer cette illustration, certes peu lisible sans la réécriture qui suit, réside dans la mesure qu'elle donne des interactions : élèves et étudiants se répondent sur la même feuille, avec des couleurs différentes, entourant des chiffres, prolongeant des nombres et se posant des questions mutuellement. L'interprétation de ces échanges demande de s'y pencher véritablement, jeu auquel on se prend vite, en tant que troisième partie de l'interaction qui s'est constitué une certaine expérience du pilotage d'un jeu de tâches. Il y a des constantes dans les réactions des uns et des autres, qui me permettent d'aller dans le sens d'une confirmation de l'hypothèse de la reproductibilité d'un jeu de tâches.

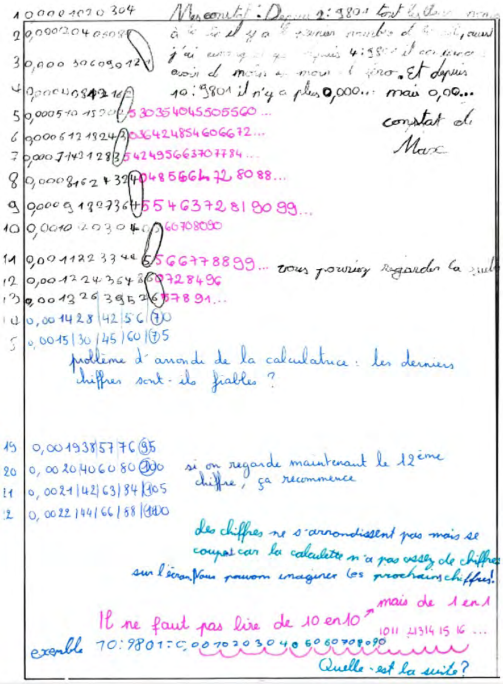


Figure 2 : Interaction groupe B3

1. En gris, élève (Max). « *Mon constat : depuis 2÷9801, tous les deux nombres, à la fin il y a le premier nombre de la suite, aussi j'ai remarqué que depuis 4÷9801 il commence à y avoir de moins en moins de zéro. Et depuis 10÷9801 il n'y a plus 0,000… mais 0,00…constat de Max. Vous pourriez*

regarder la suite. »

L'expérience que l'élève se fabrique autour des nombres lui permet de mettre en évidence des régularités dont il sait qu'il peut tirer une règle, puisqu'il demande d'aller regarder la suite.

2. En bleu, les étudiants continuent à la ligne 14 et identifient un « *problème d'arrondi de la calculatrice : les derniers chiffres sont-ils fiables ?* » Ils continuent : « *si on regarde maintenant le 12*ème *chiffre, ça recommence* ».

Le regard des étudiants ne porte pas exactement sur la même règle que l'élève puisque, pris par leur propre intérêt exploratoire de la tâche, ils s'intéressent à la suite des décimales. Les régularités sont visibles aussi bien horizontalement (les multiples du nombre divisé) que verticalement ; ils ont entouré ces régularités (1-1, 2-2, 3-3, 4-4, 5-5, 6-6, 7-7, …, 9-9). Ces dernières ne peuvent être découvertes que dans l'expérience que l'on peut en faire, sans laquelle on ne voit pas cet aspect du nombre. Le temps de l'expérience fait trop souvent défaut à l'école primaire ; si l'on considère les réponses des élèves et leur plaisir à manipuler les nombres, pour ne pas dire à jouer avec, il y a un réel enjeu à les laisser se constituer cette expérience. Ceci est valable également pour les étudiants qui n'auraient probablement pas vu ces régularités sans ce temps dévolu à l'expérience, car tout comme les élèves, ils sont souvent à la recherche d'une procédure experte. Or le bénéfice retiré apparaît dans les narrations produites en fin de cours, dont un extrait figure au terme de l'article. Toute la difficulté réside dans la dévolution de la tâche aux étudiants : leur en faire accepter la responsabilité a pris du temps ; toutefois le résultat est là car à partir du moment où ils se sont pris au jeu, il a été difficile de les arrêter. Je trouve toujours cela étonnant, de voir à quel point le nombre *aspire* grands et petits…

Reprenons l'exemple des divisions de 9801 par 19, 20, 21 et 22, dont l'illustration suivante est retranscrite (figure 3).

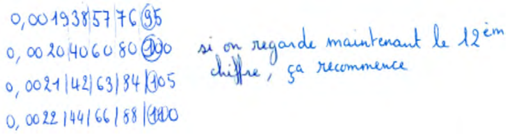


Figure 3 : Divisions de 9801 par 19, 20, 21 et 22

En observant la réponse des étudiants (figure 3 retranscrit ci-dessous)

9801/19 = 0.0019385776**9**5	
9801/20 = 0.0020406080**90**0	si on regarde maintenant le 12ème chiffre, ça recomence
9801/21 = 0.002142384**1**05	
9801/22 = 0.0022446688**11**0	

et en la comparant avec les résultats affichés par la calculatrice d'un ordinateur PC, on peut en déduire deux hypothèses : la première est que les étudiants ont peut-être utilisé une calculette à affichage de 14 chiffres, raison pour laquelle ils invoquent un « problème d'arrondi », car en effet, selon le type de paramétrage de la calculette, on n'aura évidemment pas les mêmes décimales. Par exemple, pour la division par 19, l'ordinateur affiche *0.0019385776**96**153**4**53729211 alors que les étudiants donnent la suite 0.0019385776**95***. Une calculette prise au hasard sur internet affichant 17 chiffres, présente la suite de décimales 0.001938577769**6**153**5** et une autre encore, avec un affichage de 11 chiffres, donne 0.001938577**7**. On conçoit donc que ces différences de paramétrages puissent provoquer un « *problème d'arrondi* ».

La deuxième hypothèse est que les étudiants ont peut-être eu recours à une induction à partir des régularités observées, l'expérience de ces suites ayant eu pour effet de produire une règle adoptée d'emblée sans même avoir été vérifiée, ne serait-ce qu'empiriquement. L'induction présumée serait la suivante « *si les premières décimales correspondent aux multiples du nombre divisé par 9801, alors on retrouve ces multiples dans la suite des décimales* ». Cela n'est pas faux en soi et se présente effectivement comme tel dans la première partie des décimales, mais c'est sans compter la retenue reportée lorsque l'on passe d'une dizaine à une centaine. Il faudra « aller chercher » les multiples dans cette suite car ils ne sont visibles que sous une forme composée. Par exemple : 13/9801=0.00132639526578**92**05

18314457; ils écrivent 0.0013263952657**91**, suivant une logique additive des multiples de 13. Ou encore, pour la division 9/9801= 0,00091827364554637281**91**00091, ils notent 0,00091827364554637281**9099**, toujours selon la même logique additive (9+9=18, 18+9=27, etc.).

Voici comment ils retrouvent les multiples de 9 en les extrayant de la suite des décimales de la dernière partie du quotient de 9/9801 (0,00091827364554 63) <u>7281**91**00091</u> :

```
72819100091827
  -90
    100
    -99
      109
     -108
        118
       -117
```

Ce que font les étudiants peut être considéré comme un effet des régularités observées à partir de l'expérience relativement conséquente qu'ils ont de cette division, puisque la tâche a persisté durant les quatre mois du cours, de février à mai.

3. En bleu-vert, les élèves répondent que « *les chiffres ne s'arrondissent pas mais se coupent car la calculette n'a pas assez de chiffres sur l'écran. Nous pouvons imaginer les prochains chiffres ! Exemple : 10 ÷ 9801 = 0,00102030405060708090 ; quelle est la suite ?* »

Ici intervient une intéressante question à propos de l'écriture des nombres : la façon de lire les chiffres influence la façon de les écrire, (et/ou inversement). La logique sous-jacente est différente selon la manière de les séparer après la virgule ; il est du reste assez singulier de lire, de la part des étudiants, ce qui figure au point 4 ci-après « *il ne faut pas lire de 10 en 10 mais de 1 en 1* ». Est-ce pour infléchir la réflexion des élèves et les aider à considérer la suite des décimales comme une suite de multiples de 1 plutôt que de 10 ?

4. En rose, les étudiants continuent : « *il ne faut pas lire de 10 en 10 mais de 1 en 1* ». Ils barrent le 0 de 90 et écrivent au-dessus : 9101112131415…

Ils ont apparemment changé de logique au cours de l'échange : ce ne sont plus les multiples du nombre divisé (ici 10), mais la suite numérique des multiples de 1 ; regardons la dernière portion 060708091011 : ce qu'ils écrivent aux élèves leur permet sans doute d'expliquer le passage de 06070809 à **1**011, alors que si on lit 60708**91**011, pour expliquer ce passage, il faut décomposer la suite des décimales ainsi qu'exposé plus haut, ce qui semble plus difficile. Comment revenir au caractère universel de l'écriture du nombre et montrer qu'elle ne l'influence pas, fondamentalement ? Pas si simple. Ils donnent une règle qui leur permet de contourner la question.

ANALYSE EN TERMES DE RÈGLE-EXPÉRIENCE-LOGIQUE

Le jeu de tâches autour de la division 1/9801 a mis en évidence les relations effectuées par les élèves, leur permettant, à partir de leur expérience, de faire évoluer un constat de régularités vers l'agencement d'une logique, qui elle-même leur a permis de formuler des règles; j'en ai donné un petit aperçu.

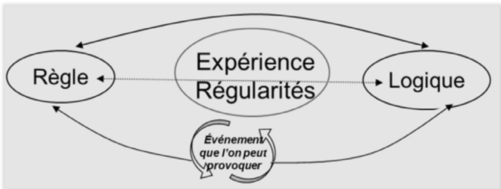


Figure 4

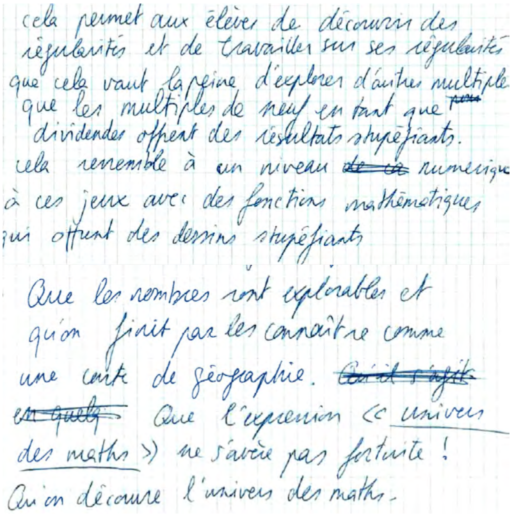
Le schéma ci-dessus montre que l'expérience est le moteur de l'enchaînement entre des nouvelles règles, qui elles-mêmes donnent lieu à de nouvelles logiques. Les régularités, qui sont de l'ordre de l'expérience, sont liées aux règles que les élèves suivent : ils dégagent et expérimentent ces régularités qu'ils prennent pour des règles. C'est parfois exact, évidemment, et parfois peu précis, mais cela leur permet néanmoins toujours d'avancer dans leur exploration du contenu.

De ces règles découlent d'autres logiques, dont ils expérimentent à nouveau les régularités, pour aboutir à de nouvelles règles. C'est un processus en boucle, dont la médiation est assurée par l'expérience.

Les sujets sont parfois intrigués, et, faut-il le dire, ne trouvent pas immédiatement de règle qui mène à la constitution des résultats allant au-delà de ce que leur calculatrice peut leur donner. J'ai également utilisé ce schéma pour analyser les procédures des étudiants.

Extraits d'étudiants

Ce que le dispositif leur a apporté :



cela permet aux élèves de découvrir des régularités et de travailler sur ses régularités que cela vaut la peine d'explorer d'autres multiple que les multiples de neuf en tant que ~~pou~~ dividendes offrent des résultats stupéfiants. cela ressemble à un niveau ~~de ce~~ numérique à ces jeux avec des fonctions mathématiques qui offrent des dessins stupéfiants

Que les nombres sont explorables et qu'on finit par les connaître comme une carte de géographie. ~~Quoi s'agit en quelq~~ Que l'expression « univers des maths » ne s'avère pas fortuite ! Qu'on découvre l'univers des maths.

Figure 5 : Extraits d'étudiants

« Cela permet aux élèves de découvrir des régularités et de travailler sur ces régularités, que cela vaut la peine d'explorer d'autres multiples, que les multiples de 9 en tant que dividendes offrent des résultats stupéfiants. Cela ressemble à un niveau numérique à ces jeux avec des fonctions mathématiques qui offrent des dessins stupéfiants, que les nombres sont explorables et que l'on finit par les connaitre comme une carte de géographie. Que l'expression 'Univers des maths' ne s'avère pas fortuite ! Qu'on découvre l'univers des maths »

Je retiens ces quelques remarques qui permettent d'avancer dans mon dispositif, vécu comme porteur : ce que je trouve le plus encourageant est que cet étudiant a saisi l'essence même de ce que j'ai voulu transmettre à propos du monde des nombres lorsqu'il dit : « *Que l'expression « univers des maths n'est pas fortuite !* »

Conclusion

> *Soit, je suis un cas pathologique. Mais avez-vous saisi le message? Les maths ne se résument pas à celles qu'on fait à l'école. Mieux : celles qu'on n'y fait pas sont passionnantes. On s'amuse souvent beaucoup avec les maths. Surtout quand il n'y a ni examen au bout ni calculs à vérifier. (Stewart I., 2008, p.7)*

En conclusion, ce qui est à retenir si l'on veut que l'élève puisse se constituer une expérience du monde des nombres, c'est que l'on ne peut pas faire l'économie de l'expérience, ce qui demande du temps. De la logique dégagée, l'élève va élaborer de nouvelles règles, l'expérience présidant à ce processus. Les régularités des actions des élèves se construisent dans l'expérience et sont dépendantes des règles qu'ils se sont données. Les étudiants sont pris dans ce dispositif et, contraints par les réponses à donner aux élèves, se retrouvent en situation d'expérimenter des régularités et de formuler des règles à leur tour.

Il est complexe de rendre compte de toutes les interactions entre les divers partenaires. Le schéma interactif bouclé ci-après tente de les modéliser :

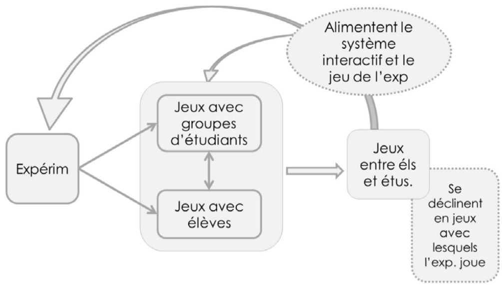


Figure 6 : Schéma interactif

Premièrement, les nombreux échanges entre l'expérimentatrice et le milieu des élèves et celui des étudiants : il y a un jeu à la fois avec les groupes d'étudiants et avec les élèves. Ces deux parties sont elles-mêmes en interaction puisqu'elles se répondent ; il y a en effet des jeux entre élèves et étudiants, ces derniers à leur tour déclinés en autant de jeux avec lesquels l'expérimentatrice interagit et qui alimentent le système tout entier.

Références

Del Notaro, C. (2010). *Chiffres mode d'emploi: exploration du milieu mathématique et expérience à l'école primaire autour* *de quelques critères de divisibilité*. Thèse en science de l'éducation, Universitée de Genève.

Del Notaro, C. (2013). 1/9801 évolution du milieu d'une division un peu particulière (Partie 1). *Math-Ecole*, 220, 26-29.

Del Notaro, C. (2014a). 1/9801 : évolution du milieu d'une division un peu particulière (Partie 2). *Math-Ecole*, 221, 16-21.

Del Notaro, C. (2014b). Implementation In Class of a Theory Stemming From a Research: A Question of Didactical Transposition. *US-China Education Review*. B, 4(10), 730-739.

Stewart, I. (2008). *Mon cabinet de curiosités mathématiques*. Paris, Flammarion.